1　$\left(\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{183}\right)\div 43=\left(\dfrac{1}{\square}-\dfrac{1}{671}\right)\div 167$

「2013＝3×11×61」を活用しましょう！

$\rightarrow \left(\dfrac{183}{2013}-\dfrac{11}{2013}\right)\div 43=\left(\dfrac{1}{\square}-\dfrac{3}{2013}\right)\div 167$

$\rightarrow \dfrac{172}{2013}\times\dfrac{167}{43}=\left(\dfrac{1}{\square}-\dfrac{3}{2013}\right)$

$\rightarrow \dfrac{1}{\square}=\dfrac{4\times 167}{2013}+\dfrac{3}{2013}\quad\rightarrow \dfrac{1}{\square}=\dfrac{668+3}{2013}\quad\rightarrow \dfrac{1}{\square}=\dfrac{671}{2013}=\dfrac{1}{3}\quad\rightarrow \square=\underline{3}$

2

1 個の値段が 180 円の和菓子(わがし)があります。また，和菓子 3 個の袋(ふくろ)詰めは 1 袋の値段が 500 円で，和菓子 10 個の箱詰めは 1 箱の値段が 1900 円です。ある日の売り上げは 19900 円で，和菓子は全部で 107 個売れました。この日，袋詰めは全部で □ 袋売れました。

**「袋買い（売り）」** 3 個で 500 円 → 単品で 180×3＝540 円なので，

540－500＝40 円安い

**「箱買い（売り）」** 10 個で 1900 円 → 単品で 180×10＝1800 円なので，

1900－1800＝100 円高い

107 個の和菓子を単品で売ると 180×107＝19260 円で，売り上げはこの値段よりも 19900－19260＝640 円高くなります。よって，次の関係が成り立ちます。

100円×（箱の数）－40円×（袋の数）＝640円

（箱の数）が 8 箱のとき，（袋の数）が（100×8－640）÷40＝<u>4 袋</u>であてはまります。

3

8 桁(けた)の整数 12345678 に下のような操作を 100 回続けて行ってできる整数は □ です。

操作　左から 1，2，3，4，5，6，7，8 番目の数字をそれぞれ左から 2，4，6，8，1，3，5，7 番目に移す。つまり，ABCDEFGH を EAFBGCHD にする。

右のように書き出していき，周期を発見しましょう。操作を 6 回おこなうと「はじめ」の配列にもどります。

100÷6＝16 あまり 4 なので，100 回目は 4 回目と同じで <u>48372615</u> になります。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| はじめ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| 1 回目 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 | |
| 2 回目 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 | |
| 3 回目 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| 4 回目 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 | ← 100 回目 |
| 5 回目 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 | |
| 6 回目 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
| ⋮ | | | | ⋮ | | | | | |

$\boxed{4}$

分母，分子がともに整数で，これ以上約分できない分数のうち，0.5 より大きく 0.51 より小さいものをすべて考えます。ただし，ちょうど 0.5 または 0.51 になる分数は除（のぞ）きます。この中で，分母が 100 以下の分数は $\boxed{\phantom{00}}$ 個あります。

0.5 と 0.51 の間にある分数を $\frac{△}{□}$ とします。□は 100 以下の整数です。

大小関係は

$$\underset{\underset{0.5}{\|}}{}\frac{50}{100} < \frac{△}{□} < \frac{51}{100}\ (=0.51)$$

分母を通分すると

$$\rightarrow \frac{50×□}{100×□} < \frac{100×△}{100×□} < \frac{51×□}{100×□}$$

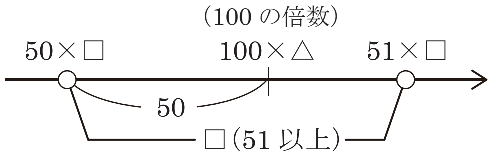
分子だけに注目すると

$$\rightarrow \quad 50×□ < \underbrace{100×△}_{(100\text{ の倍数})} < 50×□+□$$

□＝1 ～ 100 を順に検証していき，規則を見つけましょう。ここでは，**奇数のとき**，**偶数のとき**に分けて解説します。

**・□が奇数のとき**

50×□は下 2 桁が「50」（100 で割ると 50 あまる数）です。




50×□と 100×△のちがいは最小で 50 です。□は 51 以上 100 以下の奇数で，51，53，55，…，97，99 です。

**・□が偶数のとき**

50×□は 100 の倍数です。100×△とのちがいは最小で 100 なので，□にあてはまる数がない（□は 100 以下）。

よって，□＝51，53，…，97，99 の 25 個です。

$\boxed{5}$

2×2＝4 から始めて，2 つの数の間のかけ算で新しい数を作ることをくり返します。その際，2 および一度作られた数は，以降の計算に何度でも使えるという決まりにします。

例えば，2×2＝4，4×2＝8，8×2＝16 とすると，3 回のかけ算で 16 が得られますが，2×2＝4，4×4＝16 とすると，2 回のかけ算でも 16 が得られます。

このような決まりに従って，かけ算を最低 $\boxed{①}$ 回すれば 512（2 を 9 個かけた数）が得られ，かけ算を最低 $\boxed{②}$ 回すれば 32768（2 を 15 個かけた数）が得られます。

ここでは $\boxed{1}$＝2，$\boxed{2}$＝2×2，$\boxed{3}$＝2×2×2，$\boxed{4}$＝2×2×2×2，…と表すことにします。
$\boxed{9}$（2 を 9 個かけた数）と $\boxed{15}$（2 を 15 個かけた数）を最低回数で作る方法は次の通りです。

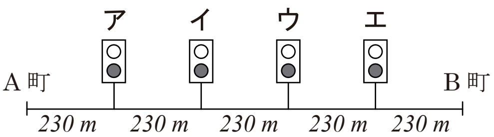
$\boxed{1}×\boxed{1}=\boxed{2} \rightarrow \boxed{2}×\boxed{2}=\boxed{4} \rightarrow \boxed{4}×\boxed{4}=\boxed{8} \rightarrow \boxed{8}×\boxed{1}=\boxed{9}$　4 回

$\boxed{1}×\boxed{1}=\boxed{2} \rightarrow \boxed{2}×\boxed{1}=\boxed{3} \rightarrow \boxed{3}×\boxed{3}=\boxed{6} \rightarrow \boxed{6}×\boxed{6}=\boxed{12} \rightarrow \boxed{12}×\boxed{3}=\boxed{15}$　5 回

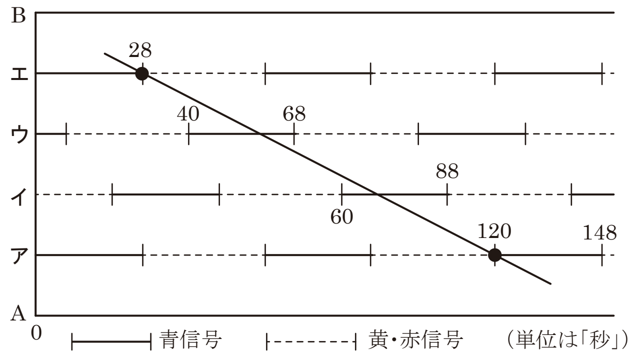
6

A 町と B 町を結ぶ一本道の途中に，230m の間隔で交差点が 4 か所あります。どの交差点にも信号があり，青が 28 秒間，黄と赤が合わせて 32 秒間点灯することをくり返します。A 町から B 町に向かって毎秒 11.5m の一定の速さで進む車は，最初の信号を青から黄になる瞬間に通過すると，残りの 3 つの信号も青から黄になる瞬間に通過します。B 町から A 町に向かって一定の速さで進む車が，一度も止まらずにどの信号も青で通過するには，車の速さは最も速くて毎秒 $\boxed{\phantom{00}}$ m です。ただし，赤から青になる瞬間と，青から黄になる瞬間は，青が点灯している時間に含めます。

この信号は 28＋32＝60 秒の周期で点灯をくり返しており，230÷11.5＝20 秒なので，**ア→イ→ウ→エ**の順で 20 秒ずつずれています。また, B 町から A 町へ逆向きで進むとき，**エ→ウ→イ→ア**の順で 60－20＝40 秒ずつずれていることがわかります。




一度も止まらずに進むとき，グラフのように進めば最も速くなります。
230×3÷（120－28）＝7.5 m/秒です。




7

2 桁の整数 AB があります。間に 0 を入れて 3 桁の整数 A0B を作ると，この数は AB で割り切れます。また，両端と間に数字 C を入れて 5 桁の整数 CACBC を作ると，この数も AB で割り切れます。このとき，5 桁の整数 CACBC は $\boxed{\phantom{00}}$ です。ただし，A，B，C はすべて異なる数字で，どれも 0 ではないとします。

A，B，C が 0 以外のすべて異なる数字であることに注意しておきましょう。

$\underbrace{\text{A0B}}_{\text{(ABの倍数)}}$－AB ＝ 100×A＋B－（10×A＋B）＝ 90×A ←（AB の倍数）

$\underbrace{\text{AB0}}_{\text{(ABの倍数)}}$－$\underbrace{\text{A0B}}_{\text{(ABの倍数)}}$ ＝ 100×A＋10×B－（100×A＋B）＝ 9×B ←（AB の倍数）

$\underbrace{\text{CACBC}}_{\text{(ABの倍数)}}$－$\underbrace{\text{A0B0}}_{\text{(ABの倍数)}}$ ＝ C0C0C ＝ 10101×C ←（AB の倍数）

この 3 つの条件ですが，素因数分解をすると次のようにまとめることができます。

2×3×3×5×A＝AB×□ …①
3×3×B＝AB×△ …②
3×7×13×37×C＝AB×○ …③

この条件を満たす A, B, C を探していきます。①②の条件から AB＝15，18，45 が絞られて，③の条件を加えると AB＝18，C＝6 が特定できます。よって，CACBC＝61686 です。

8

たくさんのマス目に，ある規則に従って 1 から 400 までの整数を書き入れていきます。1 回目は図 1 のように書き入れました。それを消して，2 回目は図 2 のように書き入れました。整数が 2 回とも書き入れられたマス目は，全部で ＿＿ 個あります。

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| 16 | 15 | 14 | 13 | |
| 9 | 8 | 7 | 12 | ⋮ |
| 4 | 3 | 6 | 11 | 18 |
| 1 | 2 | 5 | 10 | 17 |

図1

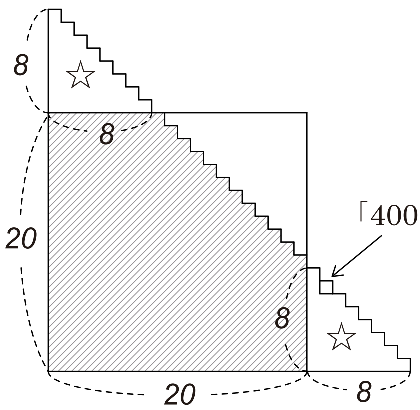
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | | | | |
| 11 | 17 | | | |
| 7 | 12 | 18 | | |
| 4 | 8 | 13 | ⋱ | |
| 2 | 5 | 9 | 14 | |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |

図2

図 1　正方形をつくるように並べます。
$20\times20=400$（平方数）なので，たて 20 マス，横 20 マスに数が並びます。

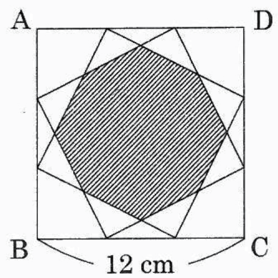
図 2　400 に近い三角数を考えます。
$1+2+3+\cdots+28=406$ なので，あと 6 個の数（406 まで）を並べると，右の図の通り。

☆の部分にはそれぞれ $1+2+\cdots+8=36$ 個の数が並ぶので，共通部分は $406-36\times2=$334 個です。

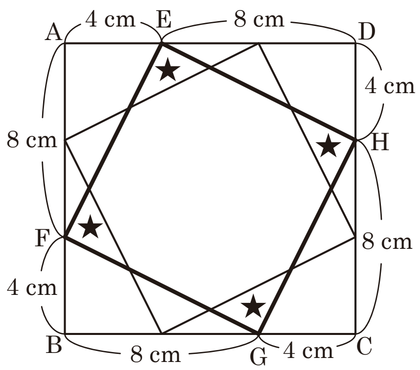


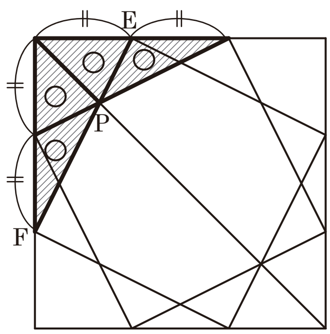

9

右の図は，1 辺の長さが 12 cm の正方形 ABCD と，それぞれの辺を 3 等分する点を 1 つおきに結んでできる図形です。このとき，斜線部分の八角形の面積は ＿＿ cm² です。

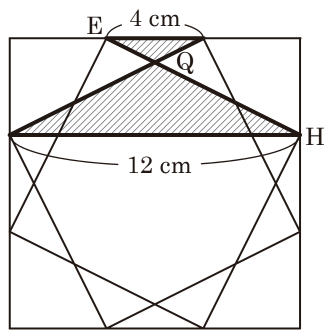



正方形 EFGH の面積は $12\times12-4\times8\div2\times4=80$ cm² で，これから 4 つの三角形★をくり抜きます。図 1，図 2 を参考にすると，EP:PF$=1:2$，EQ:QH$=1:3$ がわかるので，三角形★の面積は $80\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{10}{3}$ cm²，八角形は $80-\frac{10}{3}\times4=\frac{200}{3}$ cm² です。



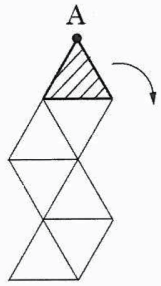

（図 1）

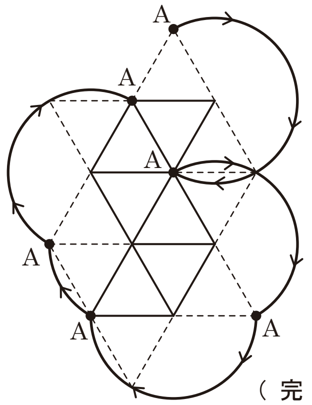



（図 2）

**10**

1 辺の長さが 3cm の正三角形 7 個を右の図のように並べます。斜線のついた三角形が，その他の三角形でできる図形の周囲に沿って，図の矢印の向きに回転しながらすべることなくひとまわりし，はじめて元の三角形の位置に戻るまで移動します。このとき頂点 A が動いた距離は □ cm です。ただし，頂点 A は元の位置に戻るとは限りません。




（完成図）

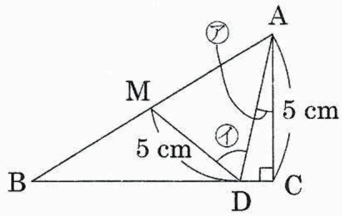
A が動いたあとの曲線の角度の合計は

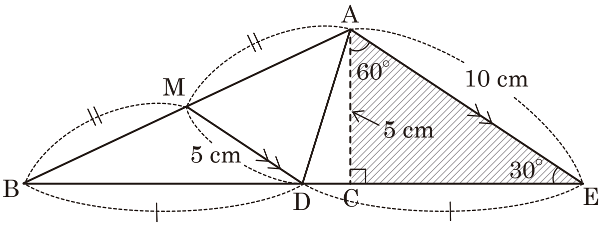
240＋180＋180＋60＋180＝840 度になります。

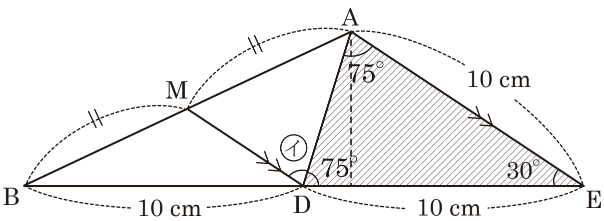
曲線の長さは $6 \times 3.14 \times \frac{840}{360} = 14 \times 3.14 =$ 43.96 cm です。

**11**

右の図の直角三角形 ABC で，M は辺 AB の真ん中の点です。また，㋐の角の大きさは 15 度，AC と MD の長さはともに 5 cm です。このとき，㋑の角の大きさは ① 度，BD の長さは ② cm です。



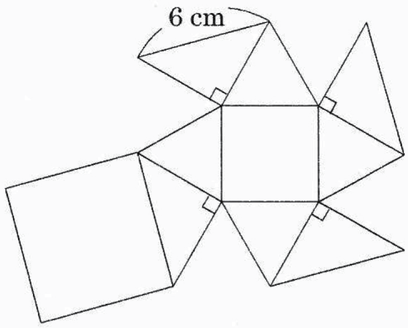




点 A から MD との平行線を引いてみましょう。1：2 の相似な三角形ができるので，AE＝5×2＝10 cm，BD＝DE です。AE：AC＝2：1 の関係なので，直角三角形 ACE が「30°　60°　90°」の三角定規（正三角形の半分）だとわかります。

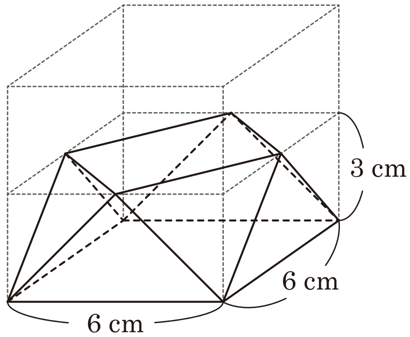
また，角 EAD＝角 EDA＝75 度なので，三角形 ADE が二等辺三角形になります。平行線の錯角は等しいので角 ㋑＝75 度，BD＝DE＝10 cm です。補助線の引き方によって色々なアプローチ方法があるので，ぜひ研究してみましょう。

12

展開図が右の図のような立体の体積は $\boxed{\phantom{00}}$ cm³です。ただし，四角形の面は正方形で，三角形の面のうち 4 個は正三角形，残り 4 個は直角二等辺三角形です。




（完成図）




右図のように，一辺が 6 cm の立方体を用いて考えてみましょう。直方体（立方体の半分）から 4 つの三角すいを取りのぞけばよいので，

体積は $6\times6\times3-3\times3\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}\times4$

$=108-18=$ 90 cm³ です。

13

立方体の形をした容器を傾（かたむ）けて固定し，水を注いだところ，図 1 のようになりました。さらに水を注ぐと図 2 のようになり，このときの水の体積は立方体の体積の $\frac{11}{14}$ 倍でした。図 1 の水の体積は立方体の体積の $\boxed{\phantom{00}}$ 倍です。

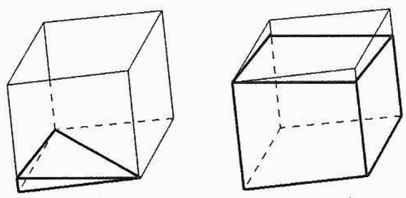
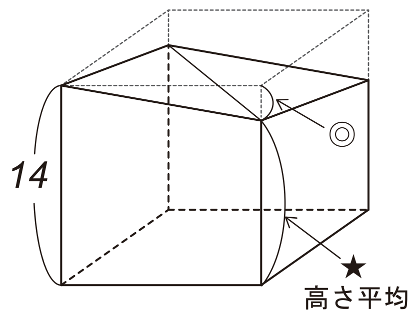


図1　　図2

（図 2）




（図 1）

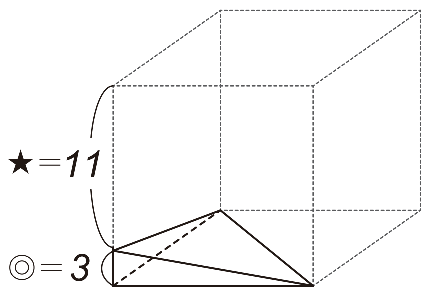



図 2 の体積が立方体の $\frac{11}{14}$ 倍なので，一辺の長さを *14* とすると，★の長さが高さの平均で *11* だとわかります。また，◎＝*14*－*11*＝*3* で，これが図 1 の三角すいの高さになります。

立方体とくらべて，底面積が $\frac{1}{2}$ 倍，高さが $\frac{3}{14}$ 倍，すい体なので $\times\frac{1}{3}$ をするので，図 2 の体積は立方体の

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{14}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{28}$ 倍です。