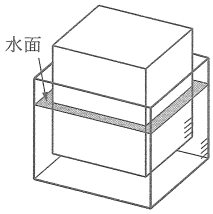
1

水平な床（ゆか）の上に置かれた，内側の底面積が 1m²，深さが 50cm の直方体の形をした水そうに，いくらかの水が入っています。この水そうの中に，底面積が 0.7m²，高さが 50cm の直方体の物体Aを，その底面を水平に保ちながらゆっくり沈（しず）めていきます。物体Aの側面と水そうの側面には，どちらにも下の端（はし）を 0cm とし，真上に向けて目盛りがついています。ただし，水そうの底面の厚みは考えません。



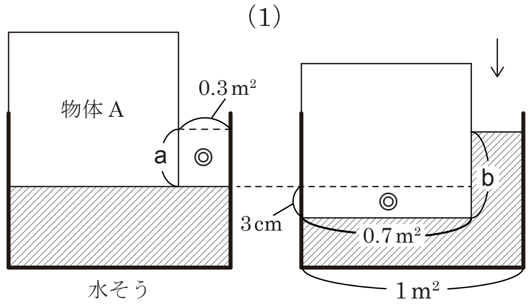
(1) 物体Aの底面が水面に触（ふ）れている状態から物体Aを沈めて，その底面を水そうの底面に 3cm だけ近づけたとき，水はあふれませんでした。このとき，水面は，水そうの目盛りで □ cm 上がり，物体Aの目盛りで □ cm のところにありました。

(2) 水面が物体Aの目盛りで 30cm のところにくるまで物体Aを沈めたとき，水面は水そうの目盛りで 50cm のところまで上がりましたが，水はあふれませんでした。

（ア）物体Aを沈め始める前の水面は，水そうの目盛りで何 cm のところにありましたか。

（イ）物体Aを水そうの底まで沈めて水をあふれさせたのち，物体Aをゆっくり引き上げました。水面が水そうの目盛りで（ア）の答えと同じところまで下がったとき，水面は物体Aの目盛りで何 cm のところにありますか。

(1)

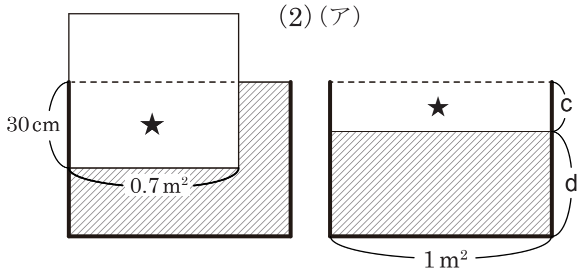


(1) 正面から見た図を必ず描きましょう！ ◎の体積が等しくなるので，a＝0.7×3÷0.3＝7 cm，b＝7＋3＝10 cm です。

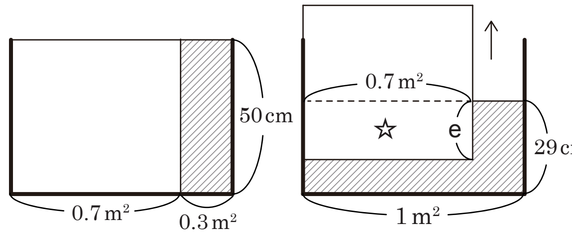
(2)(ア) ★に注目すると，c＝0.7×30÷1＝21 cm です。水面は水そうの目盛りで d＝50−21＝29 cm にあります。

(イ) A を底まで沈めると 0.3×50＝*15* の水が残ります。☆の体積が 1×29−*15*＝*14* なので，e＝*14*÷0.7＝20 cm です。

(2)（ア）



(2)（イ）



2

3 種類の液体 A，B，C が混ざった「混合液」を考えます。例えば，容器に A を 150g，B を 120g，C を 30g 入れてできる「混合液」は，全体の重さが 300g で，全体の重さに対する A，B，C の重さの割合はそれぞれ 50%，40%，10%です。これらの数字を並（なら）べた (50, 40, 10) を，この「混合液」の成分比率と呼ぶことにします。

(1) 成分比率が (10, 30, 60) の「混合液」に A を 40g 加えると，成分比率が (x, x, y) になりました。もとの「混合液」の全体の重さと，x，y の値を求めなさい。

(2) 成分比率が (45, 25, 30) の「混合液」に A を 120g 加えたのち，B を加えると，成分比率が (50, 30, 20) になりました。もとの「混合液」の全体の重さと，加えた B の重さを求めなさい。

(3) 成分比率が (30, 60, 10) の「混合液」（ア）100g に，別の成分比率の「混合液」（イ）を α g 加えると，成分比率が (42, 36, 22) になりました。さらに「混合液」（イ）を α g 加えると，成分比率が（45，30，25）になりました。「混合液」（イ） の成分比率と α の値を求めなさい。

(1)

	A	B	C	全体
(10, 30, 60) →	①	③	⑥	… ⑩
	40 g			
(x, x, y) →	③	③	⑥	… ⑫

B と C の重さは変化しません。(x, x, y) では，A＝B になります。A は②＝40 g 増えて 重さが③になるので，→ ①＝20 g → もとの全体の重さは⑩＝20×10＝200 g → 比率は $x=\frac{3}{12}\times100=$ 25，$y=\frac{6}{12}\times100=$ 50 です。

(2)

	A	B	C	全体
(45, 25, 30) →	⑨	⑤	⑥	… ⑳
	120 g	□g		
(50, 30, 20) →	⑮	⑨	⑥	… ㉚

C＝⑥のまま変化しません。(50, 30, 20) では，A＝⑥×$\frac{50}{20}$＝⑮，B＝⑥×$\frac{30}{20}$＝⑨になります。

A の増加は ⑥＝120 g →①＝20 g → もとの全体の重さは⑳＝20×20＝400 g → B は④＝80 g（□）加えました。

(3)

	A	B	C	全体
(30, 60, 10) →	30 g	60 g	10 g	…100 g（ア）
	↓	↓	↓	（イ）α g
(42, 36, 22) →	㉑	⑱	⑪	… ㊿
	↓	↓	↓	（イ）α g
(45, 30, 25) →	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{5}$	… $\boxed{20}$

A, B, C において，中段は上段と下段の平均になります。

A ⇒ 30 g＋$\boxed{9}$＝㉑×2 $\xrightarrow{\div 3}$ 10 g＋$\boxed{3}$＝⑭ …(i)

B ⇒ 60 g＋$\boxed{6}$＝⑱×2 $\xrightarrow{\div 2}$ 30 g＋$\boxed{3}$＝⑱ …(ii)

(i)(ii) の差に注目すると，④＝20 g → ①＝5 g です。

（イ）を加えると A は 105−30＝45 g，B は 90−60＝30 g，C は 55−10＝45 g 増え，全体では α＝250−100＝150 (g) 増えます。成分は (50, 20, 30) だとわかります。

3

6枚のカード 0, 1, 2, 3, 4, 5 が入った袋(ふくろ)が6個あり，袋ア，袋イ，袋ウ，袋エ，袋オ，袋カと名前がついています。これらの袋のうちいくつかからカードを 1 枚ずつ取り出します。ただし，例えば袋アから 2 を，袋イから 5 を取り出した場合と，袋アから 5 を，袋イから 2 を取り出した場合とで，取り出し方は異なるものとします。また，0 は 5 で割り切れます。

(1) 袋アと袋イからカードを1枚ずつ取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の合計を A とします。次のようなカードの取り出し方は，全部で何通りですか。

(あ) A が 5 で割り切れる

(い) A を 5 で割った余りが 1 である

(2) 袋ア，袋イ，袋ウ，袋エからカードを 1 枚ずつ取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の合計が 5 で割り切れるようなカードの取り出し方は，全部で何通りですか。

(3) 6 個の袋すべてからカードを 1 枚ずつ取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の合計が 5 で割り切れるようなカードの取り出し方は，全部で何通りですか。

(1)

袋イのカード ＼ 袋アのカード	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	0
1	1	2	3	4	0	1
2	2	3	4	0	1	2
3	3	4	0	1	2	3
4	4	0	1	2	3	4
5	0	1	2	3	4	0

表の中の数は 2 枚のカードの合計(A)を 5 で割ったときの余りを表しています。

(あ) 5 で割ると割り切れる取り出し方(余り 0)は 8 通り

(い) 余りが 1 になるのは 7 通り

(2) (1)より 2 枚の和を 5 で割ったとき，余り 0 になるのは 8 通り，余り 1, 2, 3, 4 になるのはそれぞれ 7 通りです。右のように 2 組に分けて，2 つの余りを足して 5 で割り切れる組み合わせを作ります。

ア＋イ	ウ＋エ	
0	0	→ 8×8
1	4	→ 7×7
2	3	→ 7×7
3	2	→ 7×7
4	1	→ 7×7

8×8＋(7×7)×4＝260 通り

(3) 4 枚の取り出し方は全部で 6×6×6×6＝1296 通りです。4 枚の和を 5 で割ったとき，余り 0 は 260 通り，余り 1 は(1296－260)÷4＝259 通りで，余り 2, 3, 4 もそれぞれ 259 通りです。ここでは，6 枚を(4 枚，2 枚)の 2 組に分けて，余りどうしの和が 5 で割り切れるような組み合わせを考えたいです。上のような 5 つのパターンがあり，全部で 260×8＋(259×7)×4＝2080＋7252＝9332 通りです。

ア＋イ＋ウ＋エ	オ＋カ	
0	0	→ 260×8
1	4	→ 259×7
2	3	→ 259×7
3	2	→ 259×7
4	1	→ 259×7

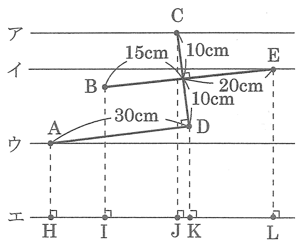
別解（応用）(1) 6＋1＋1＝8 通り　6＋1＝7 通り

(2) $6^3+6^2+6+1+1=260$ 通り

(3) $6^5+6^4+6^3+6^2+6+1+1=9332$ 通り

4

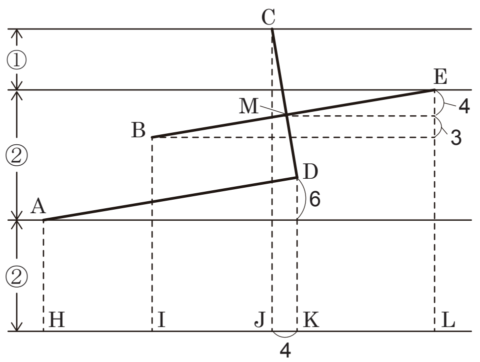
右の図で，4 本の直線ア，イ，ウ，エは平行です。点 A は直線ウの上に，点 C は直線アの上に，点 E は直線イの上に，点 H, I, J, K, L はすべて直線エの上にあります。直線 AH, BI, CJ, DK, EL はすべて直線エと垂直で，CJ の長さは AH の長さの 2.5 倍，EL の長さは AH の長さの 2 倍です。また，直線 AD, BE はどちらも直線 CD と垂直です。



(1) BI の長さは AH の長さの何倍ですか。

(2) DK の長さは AH の長さの何倍ですか。

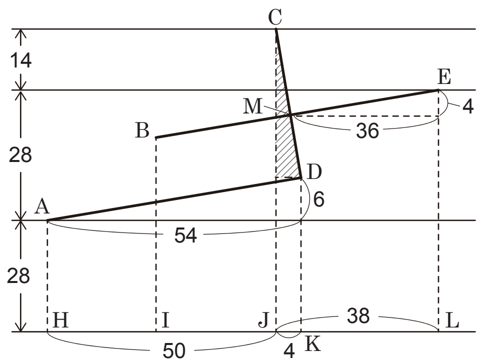
(3) JL の長さは HJ の長さの何倍ですか。



CJ＝AH×2.5, EL＝AH×2 より，ア, イ, ウ, エの間かくの比は ①:②:② です。また，AD や BM などの比から，図のような関係がいえます。CM＝MD に注目すると，(縦方向の長さ) ①＋4＝②－(4＋6) → ①＝14 です。

AH＝14×2＝28，BI＝14×4－7＝49,

DK＝14×2＋6＝34 →(1) $\frac{49}{28}=\frac{7}{4}$ 倍 (2) $\frac{34}{28}=\frac{17}{14}$ 倍



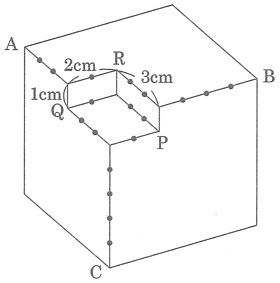
(3) CD について(横方向の長さ)は 4，(縦方向の長さ)は 14＋28－6＝36 なので，登場する相似な直角三角形は辺の比がすべて 1：9 だとわかります。

HK＝6×9＝54 なので，HJ＝54－4＝50,

JL＝36＋4×$\frac{1}{2}$＝38 → 答えは $\frac{38}{50}=\frac{19}{25}$ 倍です。

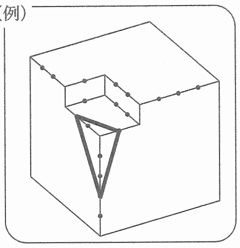
5

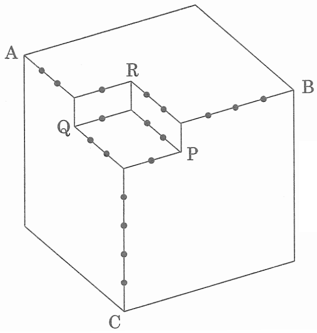
1 辺の長さが 6cm の立方体から 3 辺の長さが 1cm，2cm，3cm の直方体を取り除いてできた，右の図のような立体 T があります。いくつかの辺には 1cm ごとに目盛りがついています。また，3 点 A，B，C を通る平面を S とします。



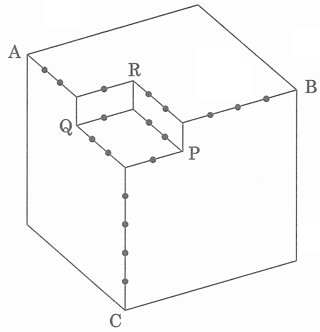
(1) 点 P を通り平面 S に平行な平面で立体 T を切ります。切り口全体の周を，（例）にならって下の図にかきなさい（答えのみかきなさい）。また，切り口全体の面積は，三角形 ABC の面積の何倍ですか。

（例）



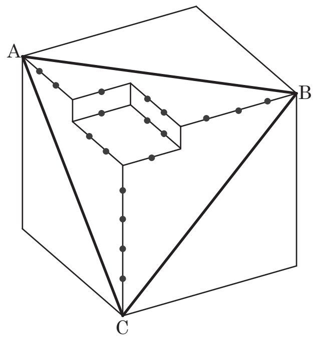


(2) 点 Q を通り平面 S に平行な平面で立体 T を切ります。切り口全体の周を，(1)の（例）にならって下の図にかきなさい（答えのみかきなさい）。また，切り口全体の面積は，三角形 ABC の面積の何倍ですか。

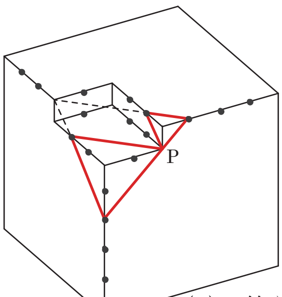


(3) 立体 T のうち，点 P を通り平面 S に平行な平面と，点 R を通り平面 S に平行な平面との間にある部分の体積は何 cm^3 ですか。

（平面 S）

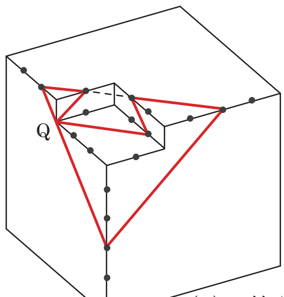


（P を通る切り口）



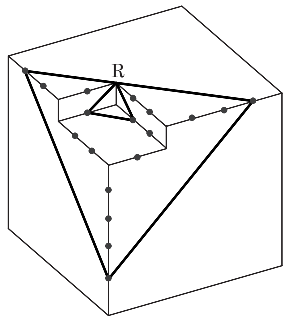
(1)の答え

（Q を通る切り口）



(2)の答え

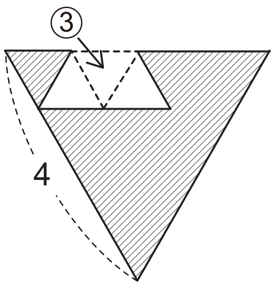
（R を通る切り口）



三角形ABC（平面 S）は正三角形で，その面積を 6×6＝36 とします。この問題では平面 S と平行な平面で切断するので，切り口の図形には正三角形が関係します。

(1) P を通る平面で切断すると，2 つの正三角形があらわれます。切り口の面積の和は 2×2＋1×1＝5 なので，正三角形ABC の $\frac{5}{36}$ 倍です。

(2) Q を通る平面で切断すると，斜線部分（下図）が切り口になります。4×4－3＝13 なので，答えは $\frac{13}{36}$ 倍です。



(3) (1)の切断面よりも手前の部分の体積は

$$\underbrace{1\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}}_{\text{(1cm の三角すい)}}+\underbrace{2\times2\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{3}}_{\text{(2cm の三角すい)}}$$

$$=\frac{1+8}{6}=\frac{3}{2}=1.5\,\text{cm}^3 \text{ です。}$$

R を通る切断面（上図）よりも手前の部分の体積は

$$\underbrace{5\times5\times\frac{1}{2}\times5\times\frac{1}{3}}_{\text{(5cm の三角すい)}}+\underbrace{1\times1\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}}_{\text{(1cm の三角すい)}}-\underbrace{1\times2\times3}_{\text{(直方体)}}$$

$$=\frac{125+1}{6}-6=21-6=15\,\text{cm}^3 \text{ です。}$$

よって，2 つの平面の間にある部分の体積は 15－1.5 ＝13.5cm^3 になります（下図の斜線部分）。