1

図１のような長方形の細長い紙を３つの折り目で折り込み，図２のようにしました。５個の点 A，B，C，D，E を頂点とする五角形は正五角形です。また，点 F は AE の真ん中の点です。

（この面の左端が黒くぬられており，裏面はぬられていない）

図１

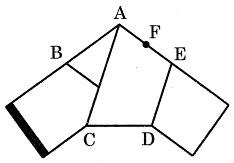
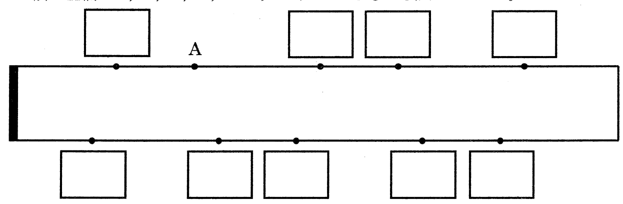
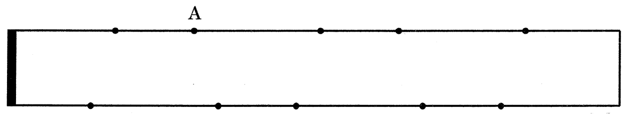


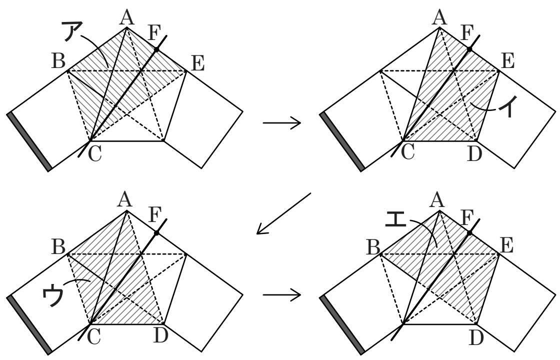
図２

(1) 紙を折り込むと，下の図のすべての黒点は図２の点 A，B，C，D，E のどれかの位置に来ます。９か所の空欄に A，B，C，D，E のうち当てはまるものを記入しなさい。

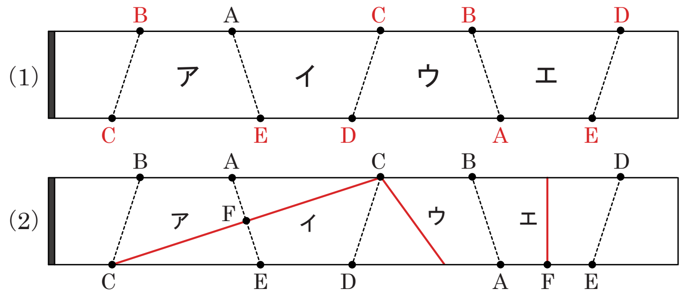


(2) 図２の紙を直線 CF に沿ってはさみで切るとき，切り口を下の図に書き込みなさい。なお，下の図の黒点は(1)の図と同じ位置にあります。





左図のようにア～エの４つの台形に注目するとわかりやすいでしょう。解答は以下の通りです。



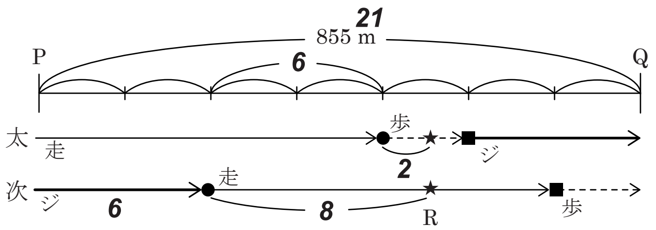
2

太郎君と次郎君は P 地点を同時に出発し，855m 離れた Q 地点に向かいます。太郎君ははじめ分速 240m で走ったのち，分速 60m で歩き，そして分速 120m でジョギングします。次郎君ははじめ分速 120m でジョギングしたのち，分速 240m で走り，そして分速 60m で歩きます。二人はこのことを２日間繰り返しました。

(1) １日目，太郎君が走った時間，歩いた時間，ジョギングした時間，次郎君がジョギングした時間，走った時間，歩いた時間はすべて同じでした。次郎君は走っている間に R 地点で太郎君を追い越し，２人同時に Q 地点に着きました。P 地点と R 地点の間の距離は何 m ですか。

(2) ２日目，太郎君と次郎君の歩いた時間は同じで，太郎君と次郎君のジョギングした時間は同じで，さらに太郎君と次郎君の走った時間は同じでした。P 地点を出発して３分後，走っている次郎君は S 地点で太郎君を追い越しました。そして出発して７分 30 秒後に同時に Q 地点に着きました。P 地点と S 地点の間の距離は何 m ですか。

(1) 速さ比 240 m/分 : 60 m/分 : 120 m/分＝4 : 1 : 2 なので，太郎と次郎の１日目の動きは図のようになります。

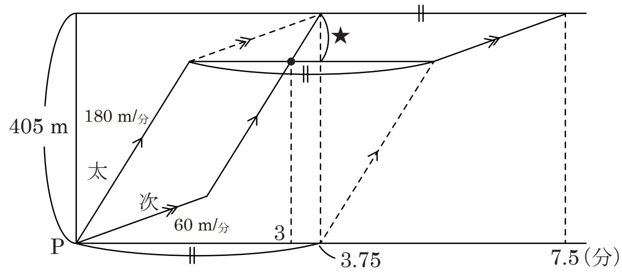


●→★の距離の比は 1 : 4 です。その差が PQ の $\frac{2}{7}$ にあたるので，比をそろえると上の図のようになります。PR 間の距離は $855\times\frac{14}{21}$ ＝570 m になります。

(2) 全ての速さを分速 60 m 減速し，歩かずに立ち止まっていたものとして考えます。Q まで 7.5 分間で着くので，この場合の進んだ距離は 855－60×7.5＝405 m です。

走	歩	ジ
240 m/分	60 m/分	120 m/分
↓	↓	↓
180 m/分	0 m/分 止	60 m/分

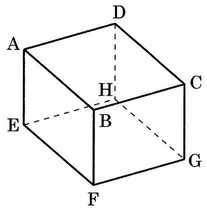
ダイヤグラムでは平行四辺形がたくさんあらわれ，図のように 7.5÷2＝3.75 分が求まります。



ダイヤグラムの★の距離は 180×(3.75－3)＝135 m で，P から●の距離は 405－135＝270 m です。次郎君が太郎君に追いつくまでに３分かかるので，PS 間の距離は 270＋60×3＝450 m になります。このように一方の速度をゼロにして相対速度の考え方を用いると，ダイヤグラムも簡略化でき，視覚的にもスンナリ解くことができました。

3

辺 AB の長さが 8cm，辺 AD の長さが 6cm，辺 AE の長さが 5cm である直方体 ABCD-EFGH があります。点 P は辺 AB 上に，点 Q は辺 BF 上にあり，AP の長さは 2cm で，BQ の長さは 3cm です。3 点 G，P，Q を通る平面 S とこの平面による直方体の切り口 K を考えます。



(1) 直方体を平面 S で 2 つの立体に切り分けたとき，点 C を含む側の立体の体積を求めなさい。

(2) 切り口 K の辺 PQ 上に点 R をとり，R と G を直線で結ぶと，三角形 GQR の面積は切り口 K の面積の $\frac{1}{3}$ 倍になりました。このとき，(PR の長さ):(RQ の長さ) を最も簡単な整数の比で表しなさい。

図 1

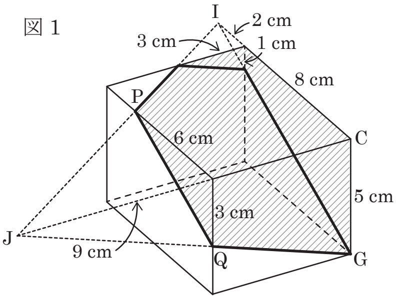
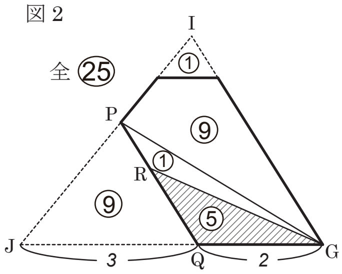


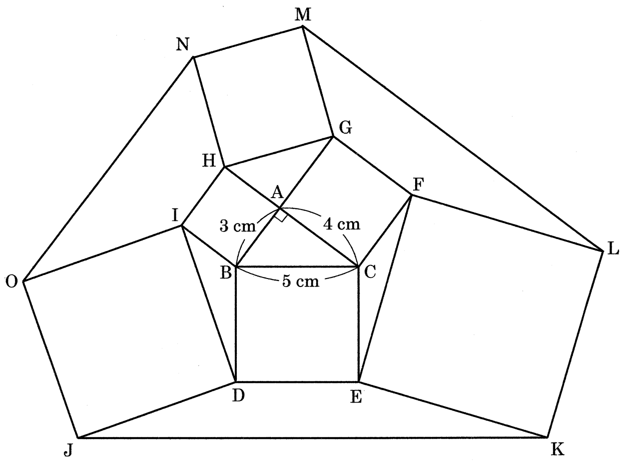
図 2



(1) 大きな三角すいから 2 つの三角すいを取りのぞいて求めます(図 1)。三角すいの相似比が 5 : 3 : 1，体積比は 125 : 27 : 1 なので，$\underbrace{1\times2\times\frac{1}{2}\times3\times\frac{1}{3}}_{\text{最小の三角すい}}\times(125-27-1)$ ＝97 cm³ になります。

(2) 三角形IJQ を㉕とすると，切り口 K は㉕－⑨－① ＝⑮，三角形GQR は⑮×$\frac{1}{3}$＝⑤ です。面積比の関係は図 2 のようになるので，PR : RQ＝1 : 5 です。

4



上の図で，三角形 ABC は直角三角形です。また，四角形 BDEC，ACFG，AHIB，EKLF，HGMN，IOJD はすべて正方形です。

(1) 六角形 DEFGHI の面積を求めなさい。

(2) 辺 JK，LM，NO の長さをそれぞれ求めなさい。

(3) 六角形 JKLMNO の面積を求めなさい。

図 1

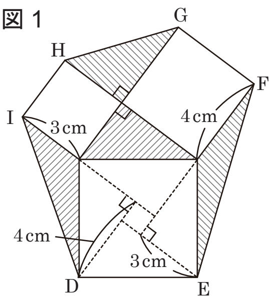


図 2

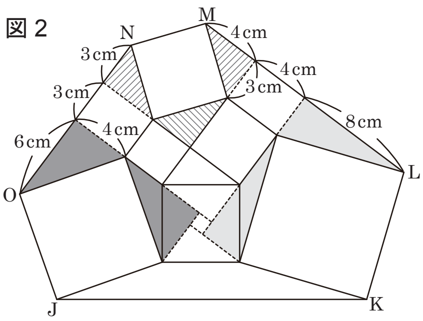
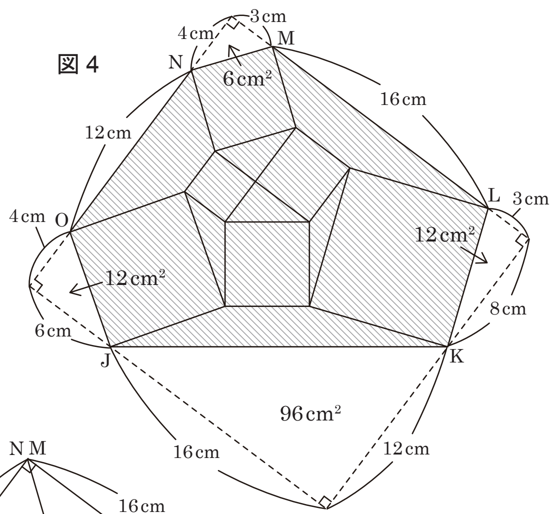


図 4



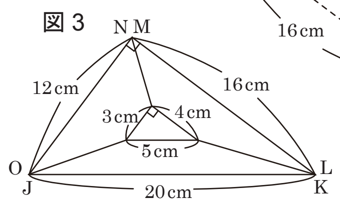
(1) 図 1 斜線の三角形は面積がすべて 6 cm² なので，合計すると 6×4＋3×3＋4×4＋5×5＝74 cm² になります。

(2) 図 2 それぞれの直角三角形は合同で，長さは図の通りです。

図 3 図のようにつなげると，3 : 4 : 5 の直角三角形ができます。

JK＝20 cm，LM＝16 cm，NO＝12 cm

図 3



(3) 図 4 長方形から 4 つの直角三角形を取りのぞくと求積できます。面積は 20×22－(6＋12＋12＋96)＝314 cm² になります。

$\boxed{5}$

$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ と書かれた 4 枚のカードが横一列に並んでいます。この列に，次の A，B，C のうちのいずれか 1 つだけを行うことを 1 回の操作として，この操作を繰り返し行います。

A：左端にあるカードを，左から 2 番目にあるカードと左から 3 番目にあるカードの間に移動させる。
B：左端にあるカードを，左から 3 番目にあるカードと左から 4 番目にあるカードの間に移動させる。
C：左端にあるカードを，右端に移動させる。

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ の順にカードを並べた状態から，この操作を始めます。
例えば，BAC の順に操作を行うとカードの並びは
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4} \to \boxed{2}\boxed{3}\boxed{1}\boxed{4} \to \boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\boxed{4} \to \boxed{2}\boxed{1}\boxed{4}\boxed{3}$
と変化します。

(1) この操作を 3 回繰り返し行うことにします。

(ア) ACB の順に操作を行った後のカードの並びは □ □ □ □ です。

(イ) 操作を 3 回行う方法は，各回ごとに A，B，C のどれを選択するかで，全部で 27 通りあります。このうち，3 回の操作後に左端のカードが

$\boxed{4}$ であるような操作の方法は □ 通り，
$\boxed{3}$ であるような操作の方法は □ 通り，
$\boxed{2}$ であるような操作の方法は □ 通り，
$\boxed{1}$ であるような操作の方法は □ 通りあります。

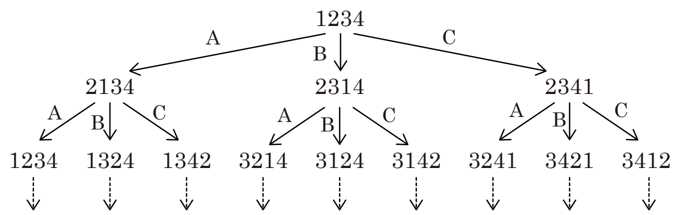
(ウ) 27 通りの操作方法のうち，例えば AAA のときも，BAB のときも，操作後のカードの並びは $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}$ となります。このように 2 通り以上の操作方法で実現できるカードの並びで $\boxed{2}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{4}$ 以外のものは，□ □ □ □ と □ □ □ □ です。

(2) この操作を 3 回繰り返し行うと左端のカードが $\boxed{2}$ になり，さらに 3 回繰り返し行うとカードの並びが $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ となるような計 6 回の操作方法は全部で何通りありますか。

(3) この操作を 6 回繰り返した後，カードの並びが $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$ となるような 6 回の操作方法は全部で何通りありますか。

(1)(ア) $1234 \xrightarrow{A} 2134 \xrightarrow{C} 1342 \xrightarrow{B}$ 3412

(イ) 3×3×3＝27 通りの操作を書き出すと次の通りです。



A	2134	3124	3142	2314	1324	1342	2341	4321	4312
B	2314	3214	3412	2134	1234	1432	2431	4231	4132
C	2341	3241	3421	2143	1243	1423	2413	4213	4123

左端のカードが 4 になる操作は 6 通り，3 は 6 通り，2 は 9 通り，1 は 6 通りあります。

(ウ) 1〜4 の 4 つの数字の並べ方は 4×3×2×1＝24 通りあり，27－24＝3 通りが重複しているとわかります。
──，┈┈，══ の下線を引いたものなので，2134 と 2314 と 2341 です。

前問より，1234 への 3 回の操作後に並びが重複するものは □ の 3 通りあります。
また，どんな並び方でも 3 回の操作で 1234 にもどりますが，□ の逆を考えると ┆┆ の 3 通りが重複するものだとわかります。

1234 → 2134
1234 → 2314
1234 → 2341

2134 → 1234
3124 → 1234
4123 → 1234

(2)(3)

① $1234 \xrightarrow{\text{操作 3 回}} 1□□□ \xrightarrow{\text{操作 3 回}} 1234$　③ 1234 → 3□□□ → 1234
② 1234 → 2□□□ → 1234　④ 1234 → 4□□□ → 1234

上の 4 パターンに場合分けをして考えていきます。

① 重複は 1 つもないので 6 通り。
② 2□□□にする操作は 9 通りで，その中で 2134 → 1234（2 通りある）は ┆┆ を参考にすると重複していることがわかるので，操作方法は 9＋2＝11 通りあります。
③ はじめの 3 回の操作は 6 通り，その中で 3124 → 1234 は重複しているので，6＋1＝7 通りあります。
④ 1234 → 4123 → 1234 のみが重複しているので 7 通り。

合計で 6＋11＋7＋7＝31 通りの操作方法があります。