$\boxed{1}$

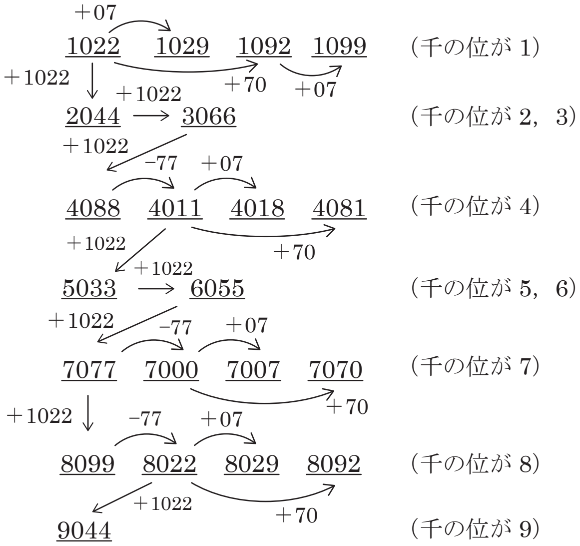
4桁の整数Aは百の位の数字が0です。Aの十の位の数字と一の位の数字を入れ替えて4桁の整数Bを作ります。4018と4081のようにAもBも7の倍数となるようなAは全部で何個ありますか。次の $\boxed{ヒント}$ を参考にして答えなさい。ただし，4018と4081の2個も含め，AとBが等しい場合も含めます。

$\boxed{ヒント}$
4081 − 4018 = 63 = 9 × 7 = 9 × (8 − 1)
4082 − 4028 = 54 = 9 × 6 = 9 × (8 − 2)
1000 = 7 × 143 − 1

A＝□0□□ は7の倍数で，Bも7の倍数であることから，AとBの差も7の倍数であります。また，十の位と一の位を入れ替えた数の差は必ず9の倍数になり，9×（十の位と一の位の差）で表せます（ヒントに記載）。

条件
① A＝□0□□が7の倍数である。
② Aの十の位と一の位の差は7もしくは0である。

3つ目のヒントの式で，1000に1を足すと7の倍数だとわかるので，4桁の最小の7の倍数は1001です。これに7ずつ足していくと最小のAが<u>1022</u>だとわかります。これに70や07や77を足し引きした数も条件①②を満たすことになり，さらに1022を増やした数も同様に条件を満たします。これをもとに書き出していきましょう。



千の位が1，4，7，8のものが4個ずつみつかり，他は各1個ずつあるので，全部で4×4＋5＝<u>21個</u>です。

$\boxed{2}$

1から52までの数が書かれたカードが，左から数が小さい順に次のように並んでいます。

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ … $\boxed{51}$ $\boxed{52}$

これらのカードを次の手順で並べ替えます。

2の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出し，取り出した順に左から並べます。その並びの右側に，取り出していないカードを順番を変えずにすべて並べます。このとき次の(A)のような並びになりました。

(A)　$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{6}$ … $\boxed{52}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ … $\boxed{51}$

(A)の状態のカードについて，3の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出して同様の手順で並べ替えました。そのときの状態を(B)とします。

(B)の状態のカードについて，

(1) 左から1番目，2番目，3番目にあるカードに書かれた数を答えなさい。

(2) $\boxed{1}$ は左から何番目にありますか。

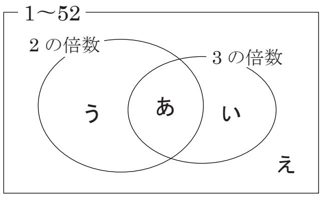
(B)の状態のカードについて，4の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出して同様の手順で並べ替え，次に5の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出して同様の手順で並べ替え，さらに6の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出して同様の手順で並べ替え，最後に7の倍数が書かれたカードを左にあるものから順にすべて取り出して同様の手順で並べ替えました。

(3) 左から1番目，2番目，3番目にあるカードに書かれた数を答えなさい。

(4) $\boxed{31}$ は左から何番目にありますか。

(5) 左から31番目にあるカードに書かれた数を答えなさい。

(1) Aの状態から3の倍数を順に取り出して左に並べていくと，1番目に<u>6</u>，2番目に<u>12</u>，3番目に<u>18</u>，…と，**あ**の6の倍数がまず並び，その後は右図の**い**→**う**→**え**の数が小さい順に並んでいきます。



$\underbrace{6\ 12\ 18\ \cdots\ 48}_{\text{あ　6の倍数}}\ \underbrace{3\ 9\ 15\ \cdots\ 51}_{\text{い　3の倍数（6の倍数のぞく）}}\ \underbrace{2\ 4\ 8\ \cdots 52}_{\text{う　2の倍数}}\ \underbrace{1\ 5\ 7\ 11\cdots}_{\text{え　それ以外}}$

(2) 1から52のうち，2の倍数は26枚，3の倍数は17枚，6の倍数は8枚あります。**あ**，**い**，**う**の合計は26＋17−8＝34枚あるので，1は左から<u>35番目</u>に並びます。

(3) 7の倍数を左に並び替えると，7の倍数のうち，6の倍数→5の倍数→4の倍数→…の数が順に並ぶことになります。1番目は7×6＝<u>42</u>，2番目は7×5＝<u>35</u>，3番目は7×4＝<u>28</u> です。

(4) 31のカードは2，3，4，5，6，7のどの倍数にも満たしません。1，11，13，17，19，23，29，<u>31</u>，37，41，47の12枚（下図の**ア**）は並び替えられることはなく右側に残っていきます。その中で31よりも大きい数が3枚あるので，左から数えると52−3−1＝<u>48番目</u>です。

(5) 右から数えて52−31＋1＝22番目を考えるとよい。

ア …(4)でふれた12枚
イ … 3，4，5，6，7の倍数をのぞいた2の倍数
ウ … 4，5，6，7の倍数をのぞいた3の倍数

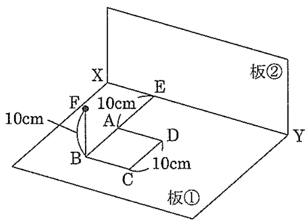
下図のように右側から**ア**→**イ**→**ウ**の順で並んでいます。**ウ**のグループの右から22−(12＋6)＝4番目のカードの<u>27</u> が答えになります。

最も右側

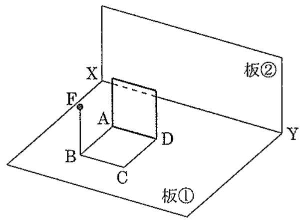
$\cdots\cdots\ \underbrace{3\ 9\ 27\ 33\ 39\ 51}_{\text{ウ　6枚}}\ \underbrace{2\ 22\ 26\ 34\ 38\ 46}_{\text{イ　6枚}}\ \underbrace{1\ 11\ \cdots\ 47}_{\text{ア　12枚}}$

3

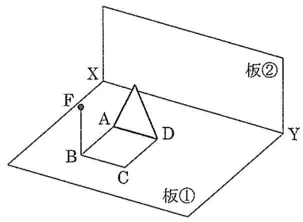
右の図のように，板①と板②が垂直に置かれています。板①と板②のつなぎ目の直線をXYとします。板①にかかれた正方形ABCDは一辺の長さが10cmです。また，直線ADと直線XYは平行で，ABとXYが交わる点をEとすると，AEの長さは10cmです。BFは長さが10cmで，板①に垂直であり，点Fに電球が置かれています。電球の大きさは考えないものとします。



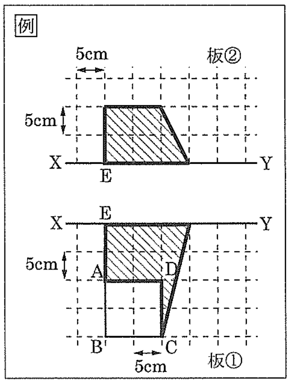
(1)　一辺の長さが10cmの正方形の板を，板②と平行に，１つの辺がADと重なるように置きます。板①と板②にできるこの正方形の板の影の面積の和は □ cm²です。ただし，板は光を通さず，板の厚さは考えないものとします。

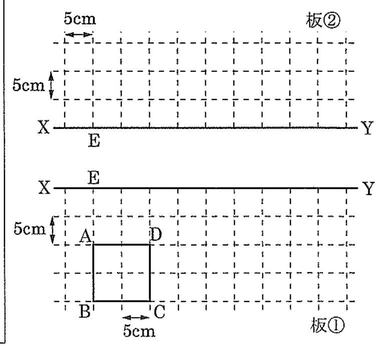


(2)　底辺の長さが10cmで高さが10cmの二等辺三角形の板を，板②と平行に，底辺がADと重なるように置きます。板①と板②にできる二等辺三角形の板の影を，例にならって右ページの上の図にかき入れなさい。

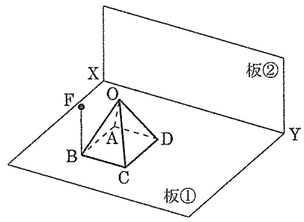


例



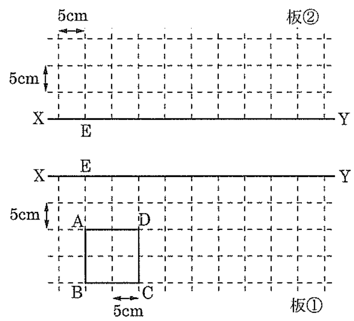


(3)　一辺の長さが10cmの正方形を底面とし，高さが10cmである四角すいの石像を，底面が正方形ABCDと重なるように置きます。この四角すいのA，B，C，D以外の頂点をOとすると，OA，OB，OC，ODの長さはすべて等しくなっています。この四角すいの石像の影が板①と板②にできます。



(ア)　板①と板②にできる四角すいの石像の影を，(2)の例にならって右の図にかき入れなさい。

(イ)　板①と板②にできる四角すいの石像の影の面積の和を求めなさい。ただし，正方形ABCDは含めません。



(1)

図１

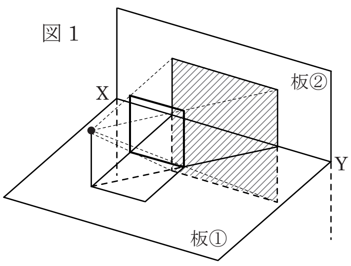
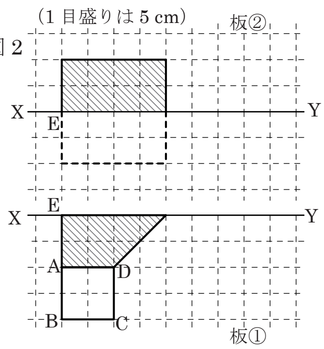


図２



正方形の板と板②は平行で，板②が真下にのびている場合を考えると，2 倍に拡大された正方形の影(図 1)ができます。これを XY で区切り，各頂点を結ぶと影は図 2 のようになります。2 つの図形の面積の和は

$10\times20+(20+10)\times10\div2=200+150=$350 cm² です。

(2)

図３

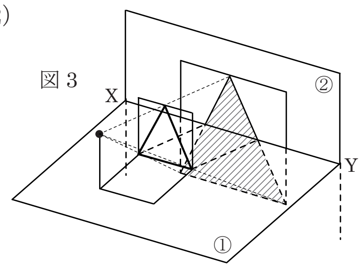
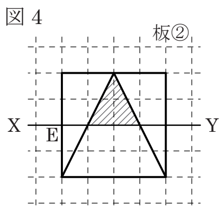


図４



二等辺三角形の板も(1)と同じで板②と平行なので，2 倍に拡大した図に注目します(図 3)。板②にできる影は図 4 のようになり，頂点を結ぶと作図が完成します。

(3) 四角すいの高さ部分に棒を立てたときの様子は図 5 になります。四角すいの石像の影で，OA の影となる部分を考えるとき，F, O, P, A の 4 点は同一平面上なので，図 6 のように OP と AQ は平行になります(つまり BD とも平行)。同じ考えで OC の影も作図できる。

図５

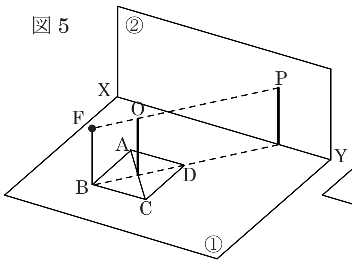
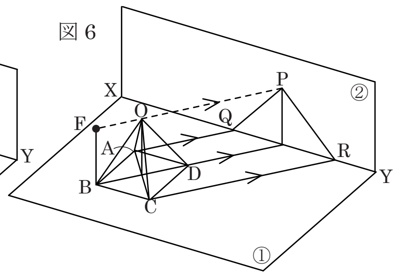
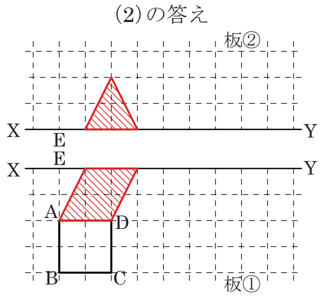


図６

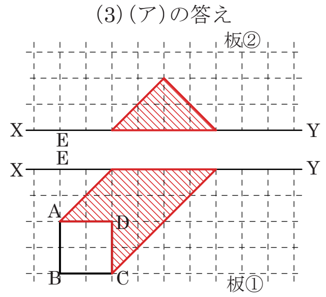


(イ) 5 cm の方眼のマス 14 個分なので，四角すいの影の面積は $(5\times5)\times14=$350 cm² だとわかります。

(2)の答え



(3)(ア)の答え



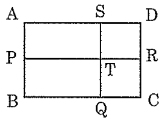
4

どの辺の長さも，3cm のように整数に単位 cm をつけて表される長方形を「整長方形」ということにします。ただし，正方形は整長方形に含めないことにします。

(1)　整長方形の周の長さが a cm，面積が a cm² であるとき，a にあてはまる整数は次の［説明文］のようにして求めることができます。空欄①，②，③に入る適当な数を答えなさい。ただし，同じ番号の空欄には同じ数が入ります。

［説明文］　右の図のように，整長方形 ABCD があり，周の長さは a cm，面積は a cm² であるとします。

辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CD 上に点 R，辺 DA 上に点 S を，直線 PR と直線 BC が平行で，直線 SQ と直線 DC が平行になるようにとります。

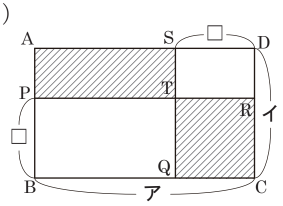


BP の長さと SD の長さがどちらも［①　］cm であるとき，整長方形 PBCR の面積と整長方形 SQCD の面積の和は a cm² になります。このとき，直線 PR と直線 SQ が交わる点を T とすると，整長方形 APTS の面積は［②　］cm² になります。このことから，整長方形 APTS の直角をはさむ 2 辺の長さとして考えられるのは 1cm と［②　］cm となるため，a にあてはまる整数は［③　］です。

(2)　整長方形の周の長さが a cm，面積が $(a\times 2)$ cm² であるとき，a にあてはまる整数をすべて求めなさい。

(3)　整長方形の周の長さが a cm，面積が $(a\times 2+8)$ cm² であるとき，a にあてはまる整数をすべて求めなさい。

(1)



左図の長方形ABCD の周の長さは a＝(ア＋イ)×2 です。PB＝SD＝□cm で，説明文より，面積を a＝□×(ア＋イ) とも表すことができる。

(ア＋イ)×2＝□×(ア＋イ) → □＝2 がわかり，BP と SD の長さはどちらも2 cmである。また，長方形PBCR と長方形SQCD の面積の和は a(長方形ABCD)なので，図の 2 つの斜線部分の面積は等しくなり，長方形APTS は □×□＝2×2＝4 cm² になります。4＝1×4 で，AP＝1 cm，AS＝4 cm となるため，ア＝4＋2＝6 cm，イ＝1＋2＝3 cm → 周の長さは a＝(6＋3)×2＝18 (cm) です。

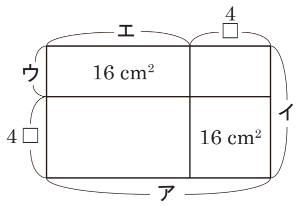
(2) 周の長さは a＝(ア＋イ)×2，

面積は a×2＝□×(ア＋イ)

→ (ア＋イ)×2×2

＝□×(ア＋イ)

→ □＝2×2＝4 です。



ウ×エ＝16 の組み合わせは 1×16 と 2×8 の 2 通りです。

ウ＝1，エ＝16 のとき

ア＝16＋4＝20 cm，イ＝1＋4＝5 cm

→ 周の長さは a＝(20＋5)×2＝50 です。

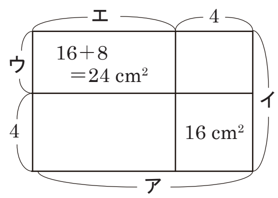
ウ＝2，エ＝8 のとき

ア＝8＋4＝12 cm，イ＝2＋4＝6 cm なので，

→ 周の長さは a＝(12＋6)×2＝36 です。

（答え）a＝36，50

(3)



長方形の面積が (2) の場合よりも 8 cm² 大きいので，4 つに分けた長方形の左上部分の面積が 16＋8＝24 cm² になります。24 の面積には 1×24，2×12，3×8，4×6 の 4 通りの組み合わせがあります。

ウ＝1，エ＝24 のとき　a＝(28＋5)×2＝66

ウ＝2，エ＝12 のとき　a＝(16＋6)×2＝44

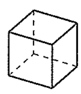
ウ＝3，エ＝8 のとき　a＝(12＋7)×2＝38

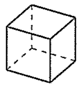
ウ＝4，エ＝6 のとき　a＝(10＋8)×2＝36

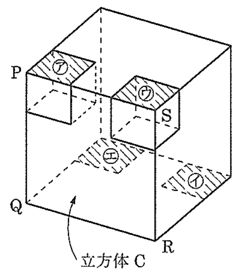
（答え）a＝36，38，44，66

5

一辺の長さが 4cm で中身がつまった 2 つの立方体 A，B があります。立方体 C は一辺の長さが 12cm で，はじめ，図のように立方体 A の上面は立方体 C の上面の㋐に，立方体 B の上面は立方体 C の上面の㋒に重なっています。立方体 A は回転することなく一定方向に進み，下面が立方体 C の下面の㋑に到着しました。そののち，立方体 B は回転することなく一定方向に進み，下面が立方体 C の下面の㋓に到着しました。このとき，立方体 A が通過した部分を X，立方体 B が通過した部分を Y として，X と Y が重なった部分を Z とします。

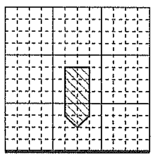

立方体 A

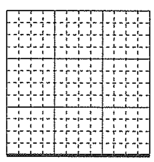

立方体 B

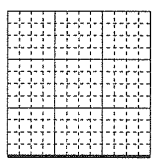


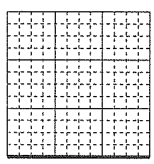
立方体 C

(1)　右の図は，立方体 C の下面から 9cm の高さにある平面で Z を切ったときの真上から見た切り口をかき入れたものです。その平面と面 PQRS の交わりを太線で表しています。立方体 C の下面から 8cm，7cm，6cm の高さにある平面で Z を切ったときの真上から見た切り口を，右の図にならってそれぞれかき入れなさい。


高さ 9cm


高さ 8cm


高さ 7cm

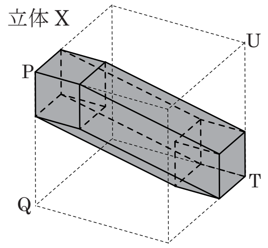

高さ 6cm

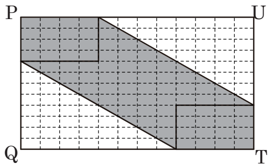
(2)　Z のうち，立方体 C の下面から 8cm の高さにある平面と 10cm の高さにある平面ではさまれた部分の体積を求めなさい。

(3)　Z のうち，立方体 C の下面から 6cm の高さにある平面と 8cm の高さにある平面ではさまれた部分の体積を求めなさい。

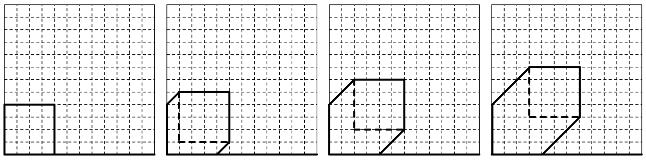
（次のページに続く）

(1)

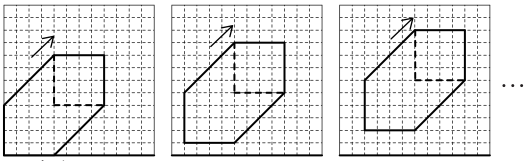




上図は立体 X で，下面から高さ 12 cm，11 cm，… の位置の断面図は下図のようになります。2 枚の正方形が右上に向かって移動していくイメージを持つとよいでしょう。

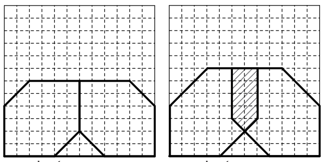


高さ 12 cm　高さ 11 cm　高さ 10 cm　高さ 9 cm

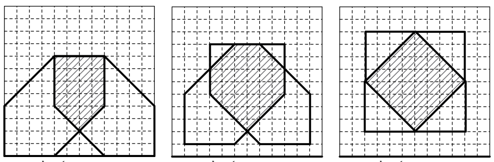


高さ 8 cm　高さ 7 cm　高さ 6 cm　…

立体 Y の断面図はこれの左右対称になり，それらの重なる部分が立体 Z の断面図で，次のようになります。

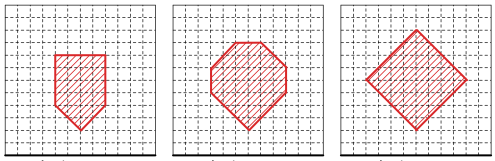


高さ 10 cm　高さ 9 cm



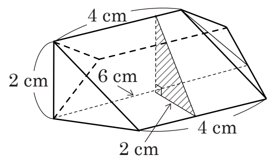
高さ 8 cm　高さ 7 cm　高さ 6 cm

(1) の答え

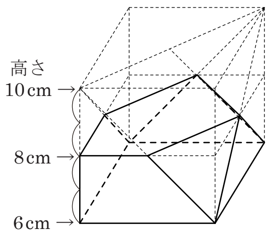


高さ 8 cm　高さ 7 cm　高さ 6 cm

(2) 前問で考えた断面図を用いて立体の把握をしていきましょう。ここで求める立体は，底面が五角形で，面が 6 枚の立体であります。体積を求めるときは，斜線部分の直角三角形が底面となる切断三角柱 2 つ分だと考えるとよいでしょう。$2\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{4+4+6}{3}\times2=\underline{\frac{56}{3}\text{ cm}^3}$ です。



(3)



左図のようになります。この図の直方体の底面の正方形は (1) の高さ 6 cm 地点での正方形（対角線が 8 cm）を表します。6 cm から 8 cm の間にある直方体は $8\times8\times\frac{1}{2}\times2=64\text{ cm}^3$ で，そこからこの直方体の $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$ の体積の三角すいを 3 つ取りのぞきます。体積は $64\times(1-\frac{1}{24}\times3)=\underline{56\text{ cm}^3}$ です。