1

1 周 600m の円形の散歩コースがあります。A さんと B さんはコース上の S 地点を同時に同じ向きに進みはじめ，A さんは毎分 50m の速さで歩き，B さんは一定の速さで走ります。A さんが 1 周して S 地点に戻った時点で 2 人は止まります。2 人が進んでいる間，S 地点と A さんの距離，S 地点と B さんの距離，A さんと B さんの距離の 3 種類の距離を測ります。ただし，これらの距離は散歩コースに沿って，短い方（等しいときはその等しい距離）が計測されます。そして，これら 3 種類の距離のうち最も短いものを「最短距離」と呼ぶことにします。例えば，S 地点と A さん，B さんの位置が，下の図 1，図 2，図 3，図 4 のとき，3 種類の距離と「最短距離」は右の表のようになります。

図	図 1	図 2	図 3	図 4
S 地点と A さん	40m	60m	60m	60m
S 地点と B さん	100m	100m	60m	0m
A さんと B さん	60m	40m	120m	60m
「最短距離」	40m	40m	60m	0m

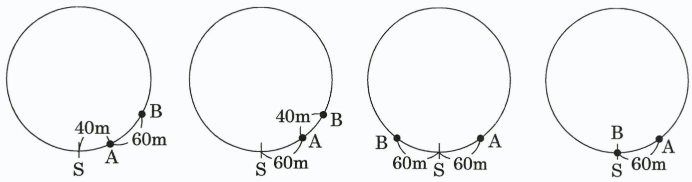
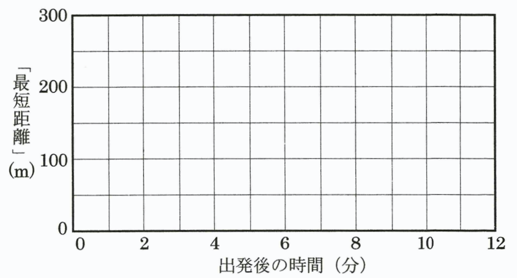
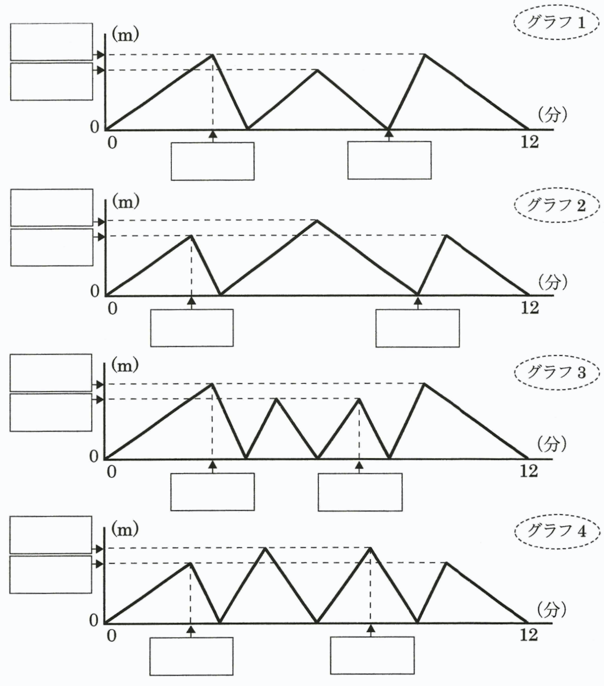


図1　図2　図3　図4

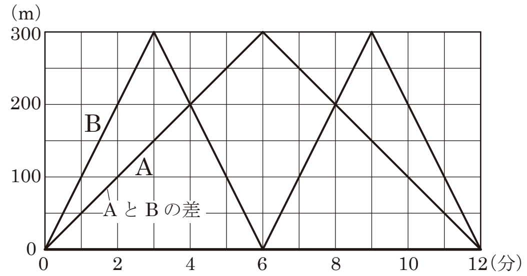
(1) B さんが毎分 100m で走る場合，出発後の時間（分）と「最短距離」（m）の関係を表すグラフを，右ページの方眼に実線でかき入れなさい。



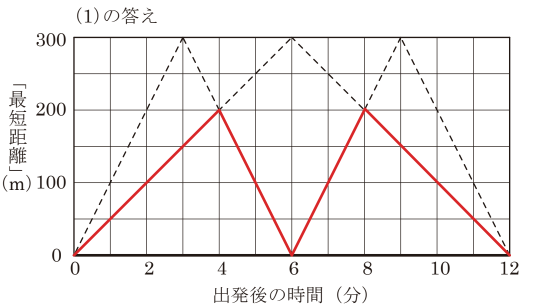
(2) B さんが毎分 150m で走る場合，出発後の時間（分）と「最短距離」（m）の関係を表すグラフとして正しいものを，次の 4 つから 1 つ選び，選んだグラフの右上のグラフ番号を囲った破線をなぞりなさい。さらに，選んだグラフの空欄に適切な数を書き入れなさい。



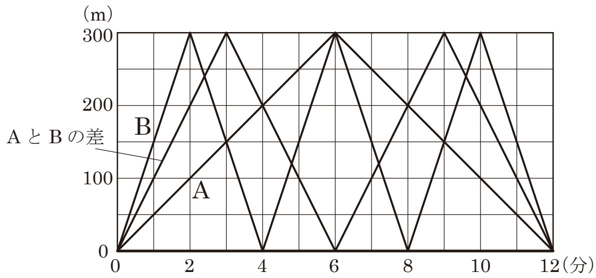
(1)(S 地点と A さん)，(S 地点と B さん)，(A さんと B さん)の 3 種類の距離のグラフを作り，これらを重ねて最短距離を考えていきます。A さんは 50 m/分，B さんは 100 m/分，2 人の速さの差が 50 m/分なので，まず 3 つのグラフは次のようになります。



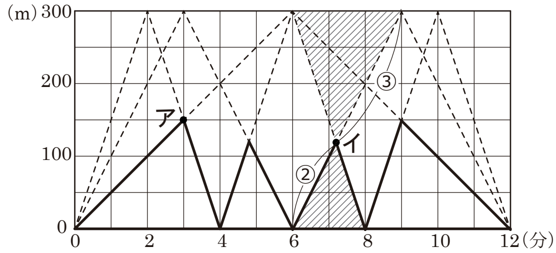
グラフを重ねたとき，最短距離は赤線の実線部分になり，これを答えとしてかき入れるとよい。

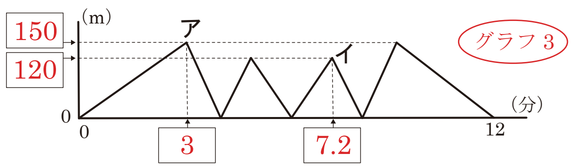


(2) A さんは 50 m/分，B さんは 150 m/分，2 人の速さの差が 100 m/分なので，3 つのグラフは図の通りです。



最短距離は下図の太線で，これは選択肢のグラフ 3 にあてはまります。交点の数値ですが，アは方眼を読み取るとよい。イは斜線部分（相似比が 3：2）に注目すると距離は $300\times\frac{2}{5}=120$ m で，時間は⑤＝3 分，②＝1.2 分なので 6＋1.2＝7.2 分です。





2

この問題では，01234，00123 なども 5 桁の数，012345，001234 なども 6 桁の数とします。また，整数 x が整数 y で割り切れるとき，x を y で割った余りは 0 であるとします。

(1) 太郎さんは 5 桁の数 ABCDE を紙に書いて次郎さんに渡しました。ただし，A，B，C，D，E の中に同じ数字が含まれてもよいものとします。また，E は A＋B＋C＋D を 10 で割った余りです。

次郎さんは A，B，C，D，E の中の 1 個を別の数字に書き換えて花子さんに渡しました。花子さんが受け取った紙に書かれた数は 28973 でした。

(ア) 太郎さんが紙に書いた ABCDE として考えられる 5 桁の数をすべて書きなさい。

(イ) 太郎さんははじめと同じ数 ABCDE を再び紙に書いて次郎さんに渡しました。次郎さんは A，B，C，D，E のうち先ほどと異なる 1 個を別の数字に書き換えて花子さんに渡しました。花子さんが受け取った紙に書かれた数は 21673 でした。

太郎さんが紙に書いた ABCDE は □ です。

(2) 太郎さんは 6 桁の数 PQRSTU を紙に書いて次郎さんに渡しました。ただし，P，Q，R，S，T，U の中に同じ数字が含まれてもよいものとします。また，T は P＋Q＋R＋S を 10 で割った余りで，U は P＋Q×3＋R×7＋S×9 を 10 で割った余りです。

次郎さんは P，Q，R，S，T，U の中の 1 個を別の数字に書き換えて花子さんに渡しました。花子さんが受け取った紙に書かれた数は 735631 でした。

太郎さんが紙に書いた PQRSTU は □ です。

(1)(ア) 10 で割ったときの余りを考えるので，2 桁以上のときは一の位の数だけを見るとよいです。次郎さんが書き換えた数は A～E の 5 通りのいずれかなので，次のように答えも 5 通り考えられます。

A	B	C	D	E
?	8	9	7	3

A+8+9+7=24+A
→ A=9 のときに一の位が 3 になる。

A	B	C	D	E
2	?	9	7	3

2+B+9+7=18+B
→ B=5 のときに一の位が 3 になる。

A	B	C	D	E
2	8	?	7	3

2+8+C+7=17+C
→ C=6 のときに一の位が 3 になる。

A	B	C	D	E
2	8	9	?	3

2+8+9+D=19+D
→ D=4 のときに一の位が 3 になる。

A	B	C	D	E
2	8	9	7	?

2+8+9+7=26
→ 一の位が 6 なので，E=6 になる。

98973，25973，28673，28943，28976 の 5 通りです。

(イ) (ア)の 5 通りの 5 桁の数のうち，21673 と 1 桁だけ数字が異なるのものを選ぶとよいので答えは 28673 です。

(2)

P	Q	R	S	T	U
?	3	5	6	3	1

P+3+5+6=14+P
→ P=9 のときに一の位が 3 になる。
9×1+3×3+5×7+6×9
→ 和は一の位が 7 になり U と一致しない。

P	Q	R	S	T	U
7	?	5	6	3	1

7+Q+5+6=18+Q
→ Q=5 のときに一の位が 3 になる。
7×1+5×3+5×7+6×9
→ 和は一の位が 1 になり U=1 と一致します。

P	Q	R	S	T	U
7	3	?	6	3	1

7+3+R+6=16+R
→ R=7 のときに一の位が 3 になる。
7×1+3×3+7×7+6×9
→ 和は一の位が 9 になり U と一致しない。

P	Q	R	S	T	U
7	3	5	?	3	1

7+3+5+S=15+S
→ S=8 のときに一の位が 3 になる。
7×1+3×3+5×7+8×9
→ 和は一の位が 3 になり U と一致しない。

P	Q	R	S	T	U
7	3	5	6	?	?

7+3+5+6=21
→ T=1 になる。
7×1+3×3+5×7+6×9=7+9+35+54=105
→ U=5 になる。
T と U の両方がもとの数と異なるので不適

よって，Q の数字を次郎さんが書き換えたことになるので，太郎さんが書いた 6 桁の数 PQRSTU は 755631 だとわかります。

3

24 時間表示のデジタル時計があります。この時計は，23 時 59 分を，：で区切られた 4 つの数字の並び「23：59」で表示し，「23：59」の次は「00：00」と表示します。

この時計を 24 時間動かしたとき，次の条件を満たす表示がされている時間は，あわせて何分間ですか。ただし，表示が変わるのにかかる時間は考えないものとします。例えば，「00：00」が表示されている時間は，1 分間です。

(1) 4 つの数字のうち，2 がちょうど 3 つある。
(2) 4 つの数字のうち，2 がちょうど 2 つある。
(3) 4 つの数字のうち，2 がちょうど 1 つある。

(1) 3 ヶ所の 2 の位置について，次の 4 つのパターンが考えられます。□に入る数字を考えていきます。

22：2□ … 0～9 の 2 以外が入るので 9 通り
22：□2 … 0～5 の 2 以外が入るので 5 通り
2□：22 … 0，1，3 の 3 通り
□2：22 … 0 と 1 の 2 通り

よって，答えは 9+5+3+2=19 分間になります。

(2) 2 ヶ所の 2 の位置について，次の 6 つのパターンがあります。前問の結果も用いて考えていきます。

22：□□ … 5×9=45 通り　2□：2□ … 3×9=27 通り
2□：□2 … 3×5=15 通り　□2：2□ … 2×9=18 通り
□2：□2 … 2×5=10 通り　□□：22 … 2×9=18 通り

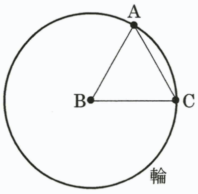
よって，45+27+15+18+10+18=133 分間です。

(3) 2 が 4 つあるときは「22：22」の 1 通り，2 を 1 つも用いない時間は 2×9×5×9=810 通りあります。
24 時間は 24×60=1440 分間なので，2 がちょうど 1 つのときは 1440−(1+19+133+810)=1440−963
=477 分間です。

4

平面上に，1辺の長さが 6cm の正三角形 ABC と，半径が 6cm の円の形をした輪があります。輪ははじめ右の図のように置かれていて，輪の中心は点 B と重なっています。

次のように輪を平面上で移動させるとき，輪が通過する部分の面積をそれぞれ求めなさい。ただし，輪の太さは考えないものとします。また，円周率を 3.14 とし，三角形 ABC の面積を 15.59cm² とします。



(1)　輪の中心が，辺 BC 上を B から C まで動く。

(2)　輪の中心が，辺 AB 上を B から A まで動いたのち，辺 AC 上を A から C まで動く。

(1)

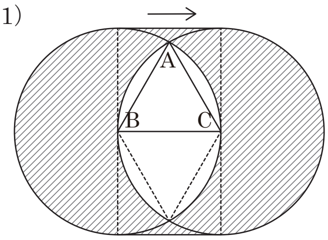


図 1

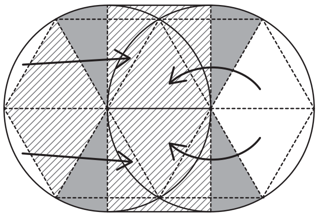


図 2

輪の通過部分は図 1 の斜線部分になります。図 2 のように変形をさせると，一辺が 6 cm の正方形 2 つと，一辺が 6 cm の正三角形 2 つ，30 度のおうぎ形が 4 つできるので，$36\times2+15.59\times2+6\times6\times3.14\times\frac{1}{12}\times4$

$=72+31.18+37.68=$140.86 cm² です。

(2)

図 3

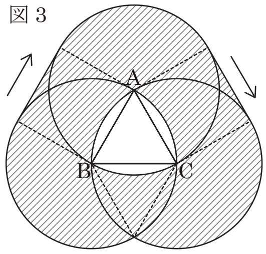
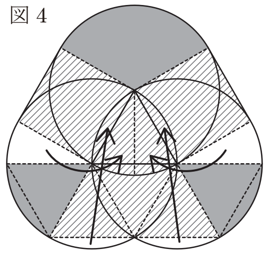


図 4

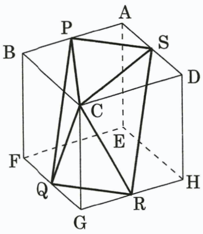


通過部分は図 3 の斜線部分になり，図 4 のように変形できます。正方形 2 つと，正三角形 4 つ，60 度のおうぎ形 2 つと 120 度のおうぎ形（中心角の和は 240 度）ができるので，$36\times2+15.59\times4+6\times6\times3.14\times\frac{2}{3}$

$=72+62.36+75.36=$209.72 cm² です。

5

右の図は，1 辺の長さが 6cm の立方体 ABCD−EFGH です。P は辺 AB の真ん中の点，Q は辺 FG の真ん中の点，R は辺 GH の真ん中の点です。この立方体を 3 点 P，Q，R を通る平面で切ったとき，この平面は辺 AD の真ん中の点 S を通ります。

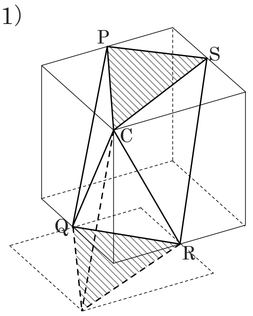


(1)　四角すい C−PQRS の体積を求めなさい。

(2)　3 点 A，B，G を通る平面で四角すい C−PQRS を 2 つの立体に分けたとき，点 Q を含む方の立体の体積を求めなさい。

(3)　3 点 B，D，F を通る平面で四角すい C−PQRS を 2 つの立体に分けたとき，その切り口の面積は，四角形 BFHD の面積の $\boxed{\quad}$ 倍で，点 Q を含む方の立体の体積は $\boxed{\quad}$ cm³ です。

(1)



斜線部分の三角形の面積は

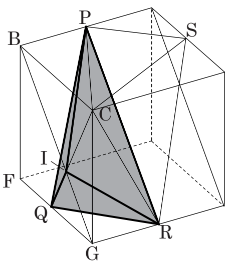
$6\times6-(3\times6\div2\times2+3\times3\div2)$

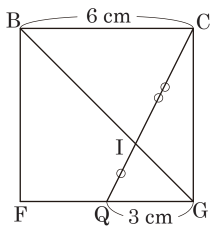
$=13.5$ cm² です。この三角形が底面で高さ 6 cm の三角柱から，同じ底面積で同じ高さの三角すいを取りのぞくとよい。

四角すいC-PQRS の体積は

$13.5\times6-13.5\times6\times\frac{1}{3}=13.5\times6\times\frac{2}{3}=$54 cm³ です。

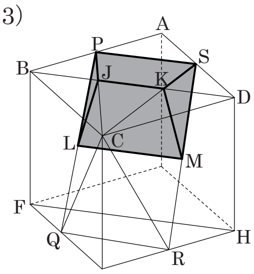
(2)





切断した様子は図のようになり，三角すい I-PQR の体積を考えます。面 BFGC にできる相似な三角形に注目すると CI : IQ＝2 : 1 なので，$54\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=$9 cm³ です。

(3)



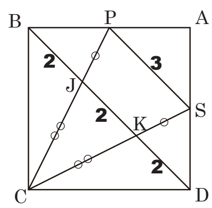
面 ABCD の各辺の比は図**ア**，切り口の台形JLMK は図**イ**のようになります。

6(cm)×**6**＝$\boxed{36}$ … 長方形BFHD

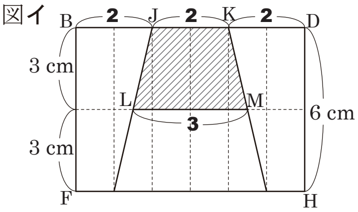
(**2**＋**3**)×3(cm)÷2＝$\boxed{7.5}$ … 台形JLMK

答えは $\frac{7.5}{36}=\frac{5}{24}$倍になります。

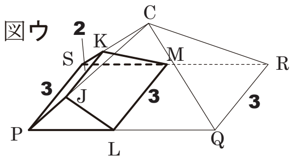
図**ア**



図**イ**



立体 JK-PLMS の体積は図**ウ**のように切断三角柱として考えます。



図**ウ**

(底面積)　(高さ平均)

三角形 CPQ $\times\frac{\mathbf{0}+\mathbf{3}+\mathbf{3}}{3}$ … 四角すいC-PQRS

三角形 CPQ$\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\mathbf{2}+\mathbf{3}+\mathbf{3}}{3}$ … 立体 JK-PLMS

立体 JK-PLMS は $54\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{8}{6}=12$ cm³，

Q を含む立体の体積は $54-12=$42 cm³ になります。