1

1より大きい整数 x について，x の約数のうち，小さい方から2番目の数と，大きい方から2番目の数の和を【x】で表します。例えば

【6】= 2 + 3 = 5，【9】= 3 + 3 = 6，【13】= 13 + 1 = 14

です。

(1)　【x】が x より大きいような，1より大きい整数 x を小さいものから順に4個並べると，
□，□，□，□ です。

(2)　【x】が12に等しいような，1より大きい整数 x は全部で4個あります。それらを小さいものから順に並べると，□，□，□，□ です。

(3)　50個の数【51】，【52】，【53】，……，【99】，【100】の中で，最も小さい数と，2番目に小さい数を求めなさい。ただし，答えは【　】を使わずに書きなさい。例えば【51】が答えの場合は20と書きなさい。

(1) 例の【13】は素数で，約数が1と13の2個です。小さい方から2番目が13で，大きい方から2番目は1になり，和は13＋1＝14で13よりも1大きくなります。こういった数を考えるとよいので x は素数だとわかります。小さいものから4個並べると 2，3，5，7 です。

(2)【x】＝ア＋イ＝12になるような数を考えます。（ア，イ）の組み合わせは（1，11），（2，10），（3，9），（4，8），（5，7），（6，6）でこの中から該当するかどうか検証します。

（ア，イ）＝（1，11）のとき

x は1×11＝11で，11の約数は1と11のなのであてはまります。

（ア，イ）＝（2，10）のとき

x は2×10＝20，20の約数は1，2，4，5，10，20で小さい方から2番目が2，大きい方から2番目が10なのであてはまります。

（ア，イ）＝（3，9）のとき

x は3×9＝27で約数は1，3，9，27であてはまります。

（ア，イ）＝（4，8）のとき

x は4×8＝32で2番目に小さい約数が2となるのであてはまらない。

（ア，イ）＝（5，7）のとき

x は5×7＝35で約数は1，5，7，35であてはまります。

（ア，イ）＝（6，6）のとき

x は6×6＝36で2番目に小さい約数が2となるのであてはまらない。

答えは小さい順に 11，20，27，35 の4個になります。

(3) Aが51ー100で，【A】の最も小さい値と2番目の値を考えます。A＝ウ × エ，【A】＝ウ＋エになり，ウ，エは約数を持たない数である素数（2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 29, 31, …）が候補としてあがります。

（ウ，エ）＝（5，11）のとき

A＝5×11＝55で，【A】＝5＋11＝16になる。

（ウ，エ）＝（5，13）のとき

A＝5×13＝65で，【A】＝5＋13＝18になる。

（ウ，エ）＝（7，11）のとき

A＝7×11＝77で，【A】＝7＋11＝18になる。

調べるとこれよりも小さい数があらわれないので，最も小さい数が 16，2番目に小さい数が 18 です。

2

箱Aには $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の3枚のカードが入っています。箱Bには $\boxed{0}$，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ の5枚のカードが入っています。2つの箱から一方を選び，次の【操作】を行います。

【操作】選んだ箱の中からカードを1枚取り出し，カードに書かれた数字を確認してカードを箱の中に戻（もど）します。これを4回繰（く）り返し，取り出した4つの数字を確認した順にア，イ，ウ，エとします。そして，9桁（けた）の整数 8ア8イ8ウ8エ8 を作ります。

(1)　箱Bを選んで【操作】を行います。そこで作られる9桁の整数 8ア8イ8ウ8エ8 が8の倍数になるカードの取り出し方は全部で □ 通りあります。

(2)　箱Aを選んで【操作】を行います。そこで作られる9桁の整数 8ア8イ8ウ8エ8 が3の倍数になるカードの取り出し方は全部で何通りありますか。

(3)　箱Bを選んで【操作】を行います。そこで作られる9桁の整数 8ア8イ8ウ8エ8 が24の倍数になるカードの取り出し方は全部で何通りありますか。

(1) 8の倍数は下3桁「8エ8」が8の倍数で，エは0か4の2通りです。ア, イ, ウはどんな数でもよいので, カードの取り出し方は5×5×5×2＝250通りです。
（ア　イ　ウ　エ）

(2) 3の倍数は各位の数の和が3の倍数になります。ア, イ, ウの3つの数は箱Aの3つの数0，1，2の3通りから自由にあてはめます。エを除く8桁の数字の和は，3でわると（あまり 0），（あまり 1），（あまり 2）のいずれかで，それぞれの場合において，エは1通りずつが決まります。よって，取り出し方は3×3×3×1＝27通りです。
（ア　イ　ウ　エ）

(3) 24の倍数は(1)の8の倍数の条件もかねるので，エは0，4のどちらかです。また3の倍数の条件もかねるので各位の和が3の倍数になります。

	箱B
（あまり 0）	0，3
（あまり 1）	1，4
（あまり 2）	2

・エ＝0のとき

8×5＋0＋ア＋イ＋ウが3の倍数になります。もし，（あまり 0），（あまり 1），（あまり 2）の数が均等に2つずつだと5×5×2＝50通りですが，ウ＝（あまり 2）は2つ存在しないのでその分をのぞくとよい。ウ＝（あまり 2）
（ア　イ　ウ）

（次のページに続く）

の場合は $8\times5+0+2=42$ が（あまり 0）なので，ア＋イ＝（あまり 0）のときに 3 の倍数になり，組み合わせは（0，0）（0，3）（1，2）（2，1）（2，4）（3，0）（3，3）（4，2）の 8 通りあります。これをのぞくと，エ＝0 で 3 の倍数になるので $50-8=42$ 通りだとわかります。

・エ＝4 のとき

$8\times5+4+$ア＋イ＋ウが 3 の倍数になり，同じように，ウ＝（あまり 2）は 2 つ存在しないのでその分をのぞいて考えます。ウ＝（あまり 2）の場合は $8\times5+4+2=46$ が（あまり 1）なので，ア＋イ＝（あまり 2）のときに 3 の倍数になります。組み合わせは（0，2）（1，1）（1，4）（2，0）（2，3）（3，2）（4，1）（4，4）の 8 通りで，エ＝4 で 3 の倍数になるのもエ＝0 と同じで $50-8=42$ 通り。

よって，答えは $42+42=$84 通りになります。

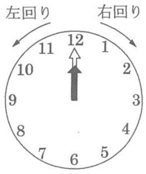
3

短針と長針のついた時計があります。図のように，最初は短針と長針が 12 時の位置でぴったり重なっています。短針は 1 時間につき 30°の一定の速さで右回りに動きます。長針は次のルールに従って動きます。

（ア）長針は 1 時間につき 360°の一定の速さで動きます。

（イ）長針は，最初は右回りに動きます。

（ウ）長針が右回りに動いている間に短針とぴったり重なると，長針は回り方を変えて左回りに動きます。長針が左回りに動いている間に短針とぴったり重なると，長針は回り方を変えて右回りに動きます。ただし，回り方を変えるのに必要な時間はないものとします。



(1) 短針が動き始めたのち，初めて短針と長針がぴったり重なるのは，短針が動き始めてから $\boxed{}$ 時間後です。その次に短針と長針がぴったり重なるのは，短針が動き始めてから $\boxed{}$ 時間後です。

(2) 短針が動き始めたのち，初めて図の 12 時の位置で短針と長針がぴったり重なるのは，短針が動き始めてから何時間後ですか。

---

(1) 長針は 1 分で 6 度，短針は 1 分で 0.5 度進みます。はじめ同じ方向に進むので長針が 1 周多く進むときに針が重なるので，$360\div(6-0.5)=360\div\frac{11}{2}=\frac{720}{11}$ 分後＝$\frac{12}{11}$ 時間後（$1\frac{1}{11}$ 時間後）。次に長針が向きを変えて，2 本の針が合わせて 1 周進むときに針が重なるので，$360\div(6+0.5)=360\div\frac{13}{2}=\frac{720}{13}$ 分＝$\frac{12}{13}$ 時間，つまり動き始めてから $\frac{12}{11}+\frac{12}{13}=\frac{288}{143}$ 時間後（$2\frac{2}{243}$ 時間後）。

(2) 短針は 12 時間ごとに 12 時の位置にあるので，次の（ア）（イ）が 12 の倍数になるときを考える。

（ア）$\frac{288}{143}\times\square=$（12 の倍数）

→ $\square=143$ のときなので，288 時間後。

（イ）$\frac{288}{143}\times\square+\frac{12}{11}=$（12 の倍数）

$\square=13, 26, 39, 52, 65, \cdots$ と 13 の倍数で順に調べていくと，$\square=65$ のときに左が $\frac{1452}{11}=132$ で 12 の倍数になります。（ア）より（イ）の方が早く，初めて 12 時の位置で重なるのは 132 時間後です。

4

光が鏡で反射するときには，図 1 のように角㋐と角㋑の大きさが等しくなります。

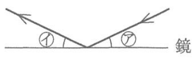


図 1

図 2 で，1 辺の長さが 10cm の正方形 XCDY の辺 YX の真ん中の点が A，辺 XC の真ん中の点が B，辺 DY の真ん中の点が E です。五角形 ABCDE の辺に沿って内向きに鏡が置かれています。頂点 A から出た光は，鏡で反射しながら五角形 ABCDE の内側を進み，A，B，C，D，E のいずれかに到達（とうたつ）するとそれ以上は進みません。

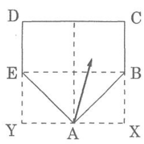


図 2

(1) 図 3 のように，A から出た光が辺 CD 上の点 P で反射したのち，辺 EA 上の点 Q で反射し，B に到達したとき，CP の長さを求めなさい。

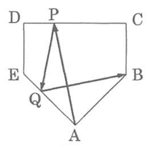


図 3

(2) A から出た光が辺 CD 上の点で反射したのち，さらに鏡で 2 回反射して C に到達する進み方は 2 通りあります。これら 2 通りの場合について，光が最初に反射した辺 CD 上の点を R とするとき，CR の長さを求めなさい。

---

(1) 鏡で反射する問題は折り返した図（線対称）を描いて考えていきましょう。A を出た光は P，Q で反射するので，図 1 のように CD と AE で折り返した図を描き，A と B を結びます。斜線部分の三角形は相似で，相似比が 3：2 なので，$DP=5\times\frac{3}{5}=3$ cm，$CP=10-3=$7 cm です。

(2) R で反射したのち，2 回反射して C に到達する方法は，図 2，図 3 の 2 通りあります。

図 1

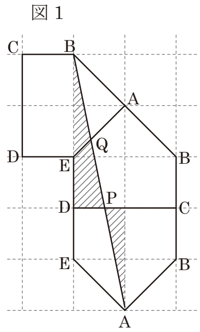


図 2

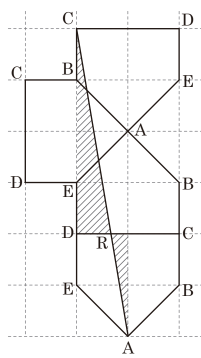
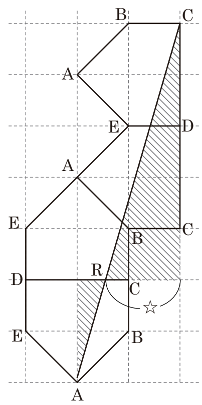


図 3



（図 2 のとき）斜線部分の三角形は相似比が 4：2＝2：1 なので，$DR=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ cm，$CR=10-\frac{10}{3}=\frac{20}{3}$ cm（$6\frac{2}{3}$ cm）です。

（図 3 のとき）斜線部分は相似比が 2：5 なので，$☆=10\times\frac{5}{7}=\frac{50}{7}$ cm，$CR=\frac{50}{7}-5=\frac{15}{7}$（$2\frac{1}{7}$ cm）です。

5

8 個の合同な正三角形でできた，図 1 のような立体 X があります。点 P は辺 DF を 3 等分する 2 つの点のうち F に近い方の点です。立体 X の辺を 3 等分する点のうちのいくつかを図 2 のように結び，立体 X の中に図 3 のような立体 Y を作ります。

A，B，D を通る平面で立体 Y を切ったとき，その断面は図 4 のようになり，分けられた 2 つの立体の体積は等しくなります。

(1) A，B，P を通る平面で立体 Y を切ったとき，分けられた 2 つの立体のうち大きい方の体積は小さい方の体積の何倍ですか。

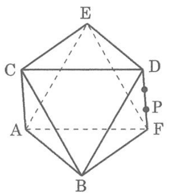


図 1

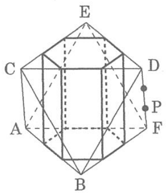


図 2

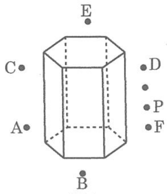


図 3

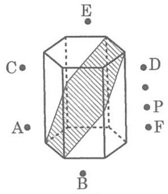


図 4

(2) 図 5 は，立体 Y の 12 個の頂点に 1, 2, …, 12 の番号をつけたものです。図 6 は立体 Y の展開図です。

A，E，P を通る平面で立体 Y を切ったときの断面の周を，図 6 にかき入れなさい。

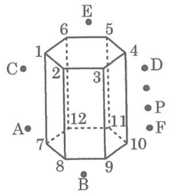


図 5

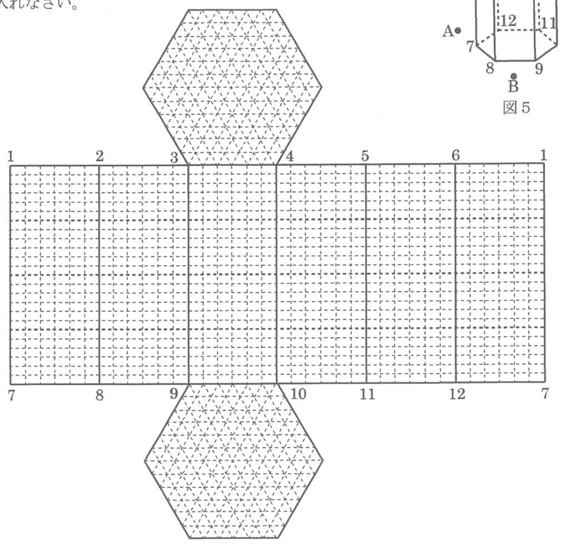


図 6

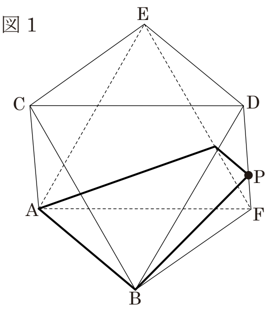


図 1

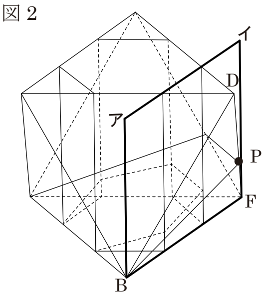


図 2

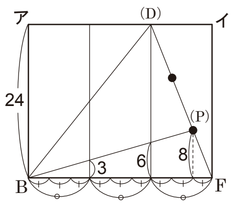


図 3

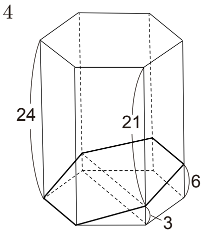


図 4

(1) 図 1 は立体 X(正八面体)を 3 点 A，B，P を通る平面で切ったときの様子で切断面は等脚台形になり，立体 Y(正六角柱)の切り口はこの平面上にできます。太線部分の長方形(図 2)の正面から立体 Y を見ると図 3 のようになり，立体 Y の高さは 8×3＝24 と表わせます。図 4 は立体 Y を 2 つの立体に切り分けた様子です。小さい方の六角柱の高さ平均は 3, 大きい方は 24－3＝21 なので，大きい方の体積は小さい方の体積の 21÷3＝7 倍になります。

(2) 図 5 は立体 X を A，E，P を通る平面で切ったときの様子で，もう 1 点は BF を 2：1 に分ける 10 番の頂点を通ります。立体 Y 底面では，切り口は 7 番と 12 番を 2:1 に分ける点**エ**を通ります(図 6)。次に図 7 の太線部分の 2 枚の長方形に注目すると，切断面と交わる点**オ**と**カ**の位置関係は図 8 のようになります。**オ**は 6 番と 12 番を 3：1 に分ける点，**カ**は 5 番と 11 番のちょうど真ん中の点です。立体 Y の切り口は図 9 のような四角形（10 番と**エ**，**オ**，**カ**を通る）になり，断面の周を展開図に書き入れると下の図が答えになります。

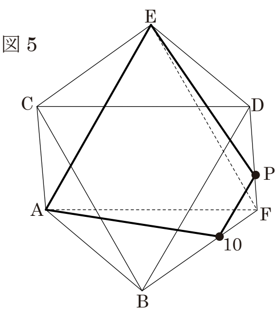


図 5

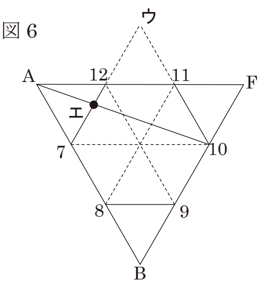


図 6

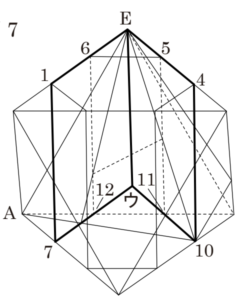


図 7

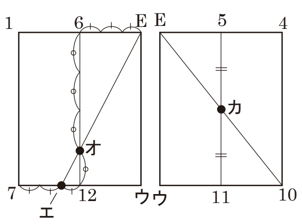


図 8

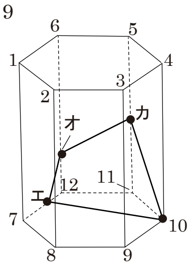


図 9

（答え）