

$$\text{①} \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{32} = \frac{1}{224} + \frac{1}{\square} - \frac{2}{63}$$

2016 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 7 を利用します。分母をすべて 2016 に通分すると、

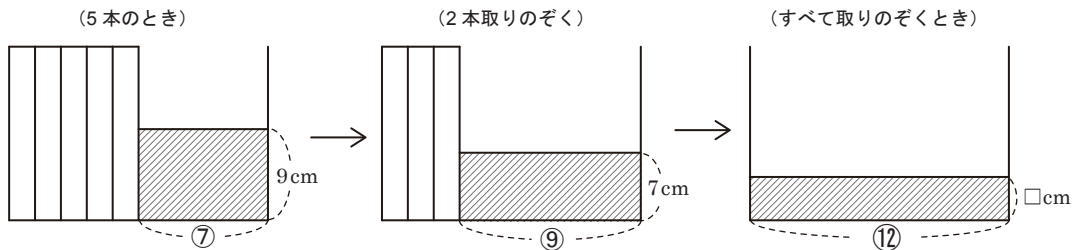
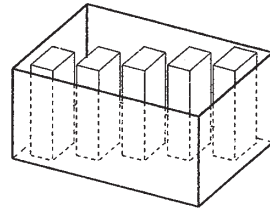
$$\text{(左)} = \frac{9 \times 32}{2016} - \frac{7 \times 32}{2016} - \frac{7 \times 9}{2016} = \frac{(9-7) \times 32 - 63}{2016} = \frac{64-63}{2016} = \frac{1}{2016}$$

$$\text{(右)} = \frac{9}{2016} + \frac{x}{2016} - \frac{32 \times 2}{2016} = \frac{9+x-64}{2016}$$

→ 1 = 9 + x - 64 → x = 56 です。 $\frac{56}{2016} = \frac{1}{36}$ なので、□は **36** になります。

②

深さ 15 cm の直方体の形をした水槽が水平な床の上にあります。右の図のように、この水槽の中には、同じ形をした高さ 15 cm の四角柱が 5 本入っていて、この水槽に深さが 9 cm になるまで水を入れても、四角柱の底面は水槽の底面に接していました。この状態から四角柱を 2 本取り除くと、水の深さは 7 cm になりました。さらに残りの四角柱 3 本を取り除くと、水の深さは □ cm になります。



水量は変化しません。深さの比が 9 : 7 なので、底面積の比が 7 : 9 です。四角柱 2 本分の底面積が ⑨ - ⑦ = ② だとわかります。1 本あたりの底面積は ① で、水槽の底面積は ⑦ + ⑤ = ⑫ と表せます。水量について、⑦ × 9 = ⑫ × □ なので、□ = 7 × 9 ÷ 12 = $\frac{21}{4}$ cm です。

③

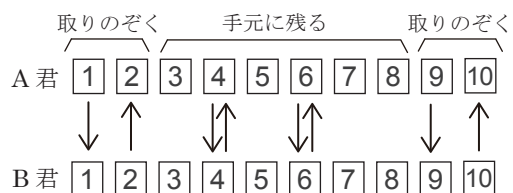
A 君と B 君は 2 人とも、1 から 10 までの数字が書かれた 10 枚のカード ①, ②, …, ⑩ をもっています。A 君は自分のもっている 10 枚のカードから 4 枚のカード ①, ④, あ, い を選び、B 君も自分のもっている 10 枚のカードから 4 枚のカード ②, ⑥, ⑩, う を選び、たがいに選んだ 4 枚のカードを交換します。その後、同じ数字が書かれたカードが手元にあれば、その 2 枚のカードを手元から取り除きます。その結果、A 君の手元には 6 枚のカード ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ が残りました。このとき、あ に書かれた数字は ① □, い に書かれた数字は ② □, う に書かれた数字は ③ □ です。ただし、あ に書かれた数字は い に書かれた数字より小さいものとします。

2 人の手元に残るカードは ③④⑤⑥⑦⑧

で、取りのぞかれるカードは ①②⑨⑩ です。手元に残るカードは

「2 人とも交換しない」「2 人とも交換する」
これのどちらかです。逆に、取りのぞかれるカードは
「どちらか一方が相手に渡してしまう」

このようなカードになります。



A 君は 1, 4, ⑥, ⑨ を選び、B 君は 2, ④, 6, 10 のカードを選んだことになります。

4

A 君と B 君が円形のジョギングコースを同じ向きに走りました。A 君と B 君は地点 P を同時にスタートし、その 9 分後に、A 君はちょうど 6 周、B 君はちょうど 4 周して同時に地点 P を通過しました。この間、A 君は毎分 200 m の速さで走りました。B 君は、初めの 30 秒間は毎分 200 m の速さで走りました。その後、B 君は、A 君に追いつかれるごとに、追いつかれてから 30 秒間だけは毎分 200m の速さで走りましたが、それ以外の時間は一定の速さで走りました。その一定の速さは、最も速くて毎分 ① m、最も遅くて毎分 ② m です。

A 君は 9 分間走り続けて 6 周するので、コース 1 周は $200 \times 9 \div 6 = 300\text{m}$ です。また、A 君は B 君を 2 周抜き します。

(パターン①)



(パターン②)



9 分間について、 の時間では 2 人が同じ速さで、 の時間に A 君が 1 周抜きをします。それがちょうど 2 回あります。

(パターン①)

A 君のほうが $300 \div 4 = 75\text{m/分}$ 速いので、B 君は $200 - 75 = 125\text{m/分}$ (最も速い)。

(パターン②)

A 君のほうが $300 \div 3 \frac{3}{4} = 80\text{m/分}$ 速いので、B 君は $200 - 80 = 120\text{m/分}$ (最も遅い)。

5

1000 以下の整数のうち、2 でも 3 でも 5 でも割り切れない整数を小さいものから順に並べると

1, 7, 11, 13, 17, ..., 997

となります。このなかで、一の位の数 が 7 である整数は全部で ① 個あります。また、7 で割り切れる整数は全部で ② 個あります。

① 2 と 3 と 5 の最小公倍数は 30 なので、(1 ~ 30) (31 ~ 60) ... のように区切って考えます。2, 3, 5 の倍数でない数は 1 段ごとに 8 個ずつあり、1 つ下の段は 30 ずつ大きくなります。

$$1000 \div 30 = 33 \text{ あまり } 10$$

→ 33 段でき、34 段目に 2 個並びます。

一の位が 7 の数は、表の★の列なので、 $34 + 33 = 67$ 個あります。

② さらに 7 の倍数に の印をつけていくと、7 段ごとに周期が発見できます。1 周期 (7 段) に 7 の倍数は 8 個あります。4 段目には 2 個存在することに注意しましょう！

$$33 \div 7 = 4 \text{ あまり } 5 \rightarrow 7 \text{ の倍数は全部で } 8 \times 4 + 6 = 38 \text{ 個あります。}$$

周期		★			★			
1 段 →	1	7	11	13	17	19	23	29 (~30)
2 段 →	31	37	41	43	47	49	53	59 (~60)
3 段 →	61	67	71	73	77	79	83	89 (~90)
4 段 →	91	97	101	103	107	109	113	119 (~120)
5 段 →	121	127	131	133	137	139	143	149 (~150)
6 段 →	151	157	161	163	167	169	173	179 (~180)
7 段 →	181	187	191	193	197	199	203	209 (~210)
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
33 段 →	961	967	971	973	977	979	983	989 (~990)
34 段 →	991	997						

29 段目 ... 1 個 30 段目 ... 1 個 31 段目 ... 1 個
32 段目 ... 2 個 33 段目 ... 1 個

7

光が鏡で反射するときには、図1のように角⑦と角⑧が等しくなります。

図2は、2枚の鏡OX, OYで、光が何回も反射する様子を表しています。1回目に反射する点がP, 2回目に反射する点がQです。4回目に反射する点が、反射する点のうちでOに最も近い点となると、角⑨の大きさは、最も大きくて①度、最も小さくて②度です。ただし、Oに最も近い点は2個以上あってもよいものとします。

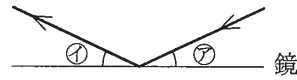


図1

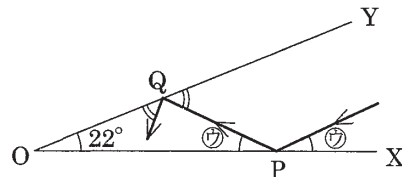


図2

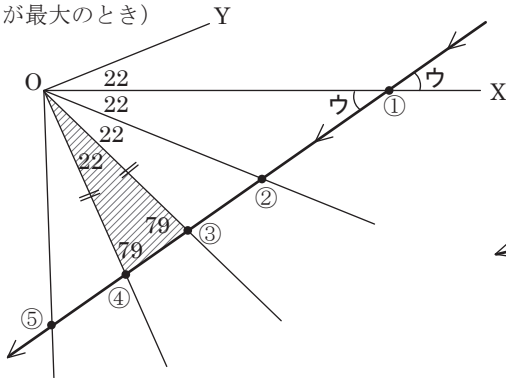
折り返した図(線対称)を描いて考えます。ここでは、1回目, 2回目, 3回目, ... に反射する点を①, ②, ③, ... とします。

(角ウが最大) 点Oと④の距離が最も近くなる場合を考えます。点Oから③と④の距離が等しく、斜線部分が二等辺三角形になるので、 $ウ = 79 - 44 = 35$ 度です。

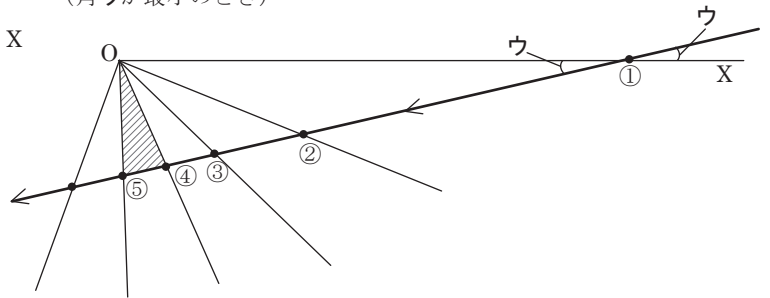
(角ウが最小) 点Oから④と⑤の距離が等しく、斜線部分が二等辺三角形になります。

ウの角度は最大の場合よりも22度小さくなるので、 $35 - 22 = 13$ 度です。

(角ウが最大するとき)

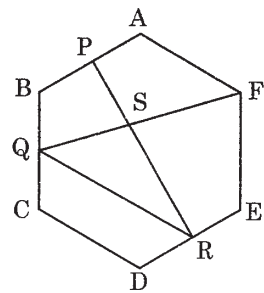


(角ウが最小するとき)



8

右の図のような正六角形ABCDEFがあり、点P, Q, Rは、それぞれ辺AB, BC, DEの真ん中の点です。2本の直線PR, QFは点Sで交わっています。このとき、三角形QRSの面積は、正六角形ABCDEFの面積の 倍です。



正六角形の1辺の長さを2とします(図1)。

FS : SQ = 4 : 3 なので、三角形RFSとQRSの面積比は4 : 3になります。三角形FQRは等積変形すると、図2のような正三角形になり、これは全体の $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ 倍だと視覚的にもわかります。よって、三角形QRSは、

全体の $\frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{9}{56}$ 倍になります。

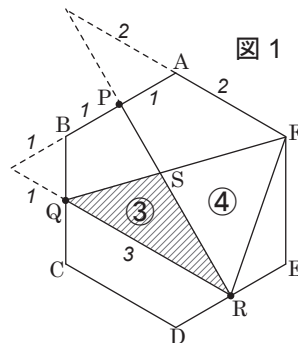
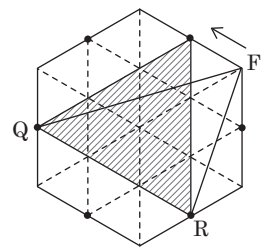


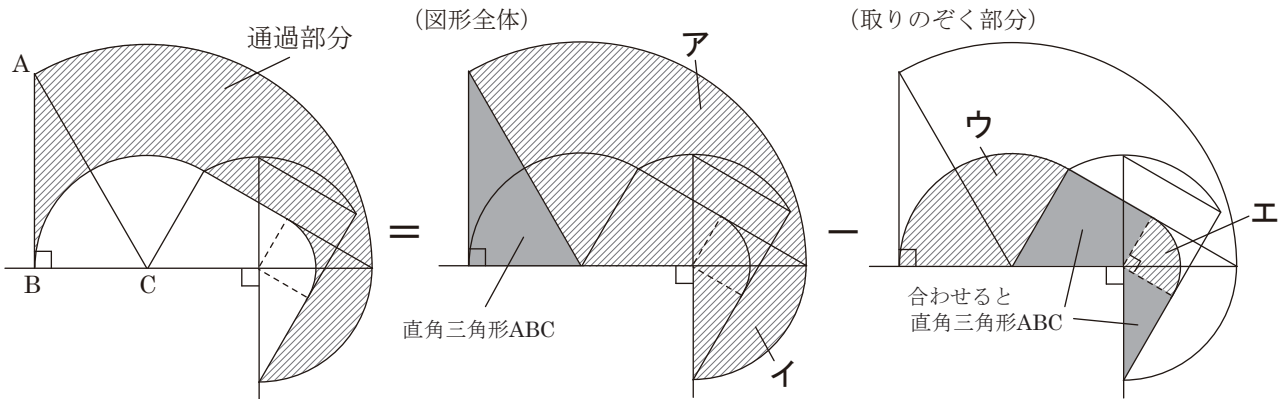
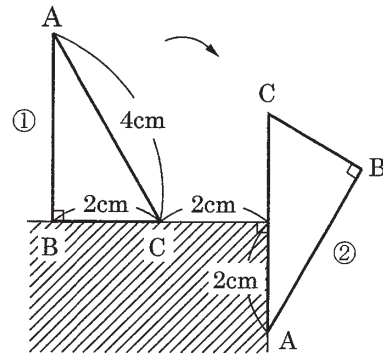
図1

図2



9

右の図のような直角三角形 ABC があります。この直角三角形が斜線部分の外側を、①の状態から矢印の方向にすべることなく転がって、②の状態まで移動します。このとき、辺 AB が通過する部分の面積は cm^2 です。



(通過部分) = (図形全体) - (取りのぞく部分)

$$= \frac{4 \times 4 \times 3.14 \times \frac{1}{3}}{\text{ア}} + \frac{2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{4}}{\text{イ}} - \frac{2 \times 2 \times 3.14 \times \frac{1}{3}}{\text{ウ}} - \frac{1 \times 1 \times 3.14 \times \frac{1}{4}}{\text{エ}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} + 1 - \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) \times 3.14 = 4 \frac{3}{4} \times 3.14 = \underline{14.915 \text{ cm}^2}$$

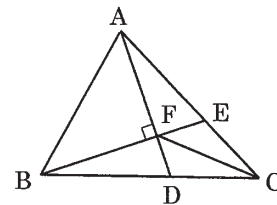
10

右の図の三角形 ABC において、2本の直線 AD と BE は点 F で垂直に交わっています。また、

(BD の長さ) : (DC の長さ) = 3 : 2

(AB の長さ) : (CF の長さ) = 3 : 2

です。このとき、FD の長さは AF の長さの ① 倍で、四角形 FDCE の面積は三角形 ABC の面積の ② 倍です。



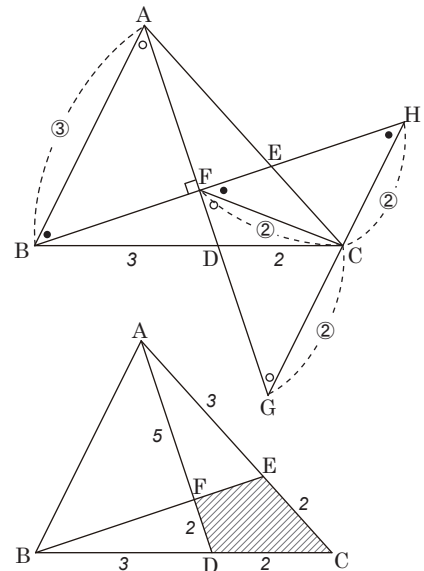
① AB と平行で、C を通る平行線 GH を引きます。三角形 ABD と三角形 GCD は相似比が 3 : 2 の関係で、三角形 CFG が二等辺三角形になります (○ + ● = 90 度)。また、三角形 CHF も二等辺三角形なので、CF = CH = ② です。

三角形 ABD と三角形 GCD の相似 → AD : DG = 3 : 2
 三角形 ABF と三角形 GHF の相似 → AF : FG = 3 : 4

比をそろえると AF : FD : DG = 15 : 6 : 14

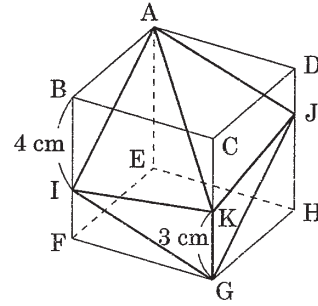
→ FD は AF の $\frac{6}{15} = \underline{\frac{2}{5}}$ 倍の長さです。

② 三角形 ABE と三角形 CHE の相似より AE : EC = 3 : 2 です。四角形 FDCE は三角形 ADC の $1 - \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$ 倍なので、三角形 ABC の $\frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \underline{\frac{8}{35}}$ 倍です。



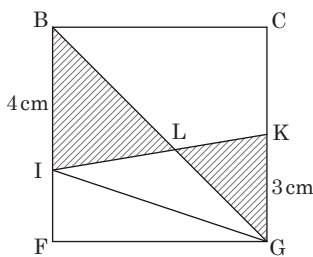
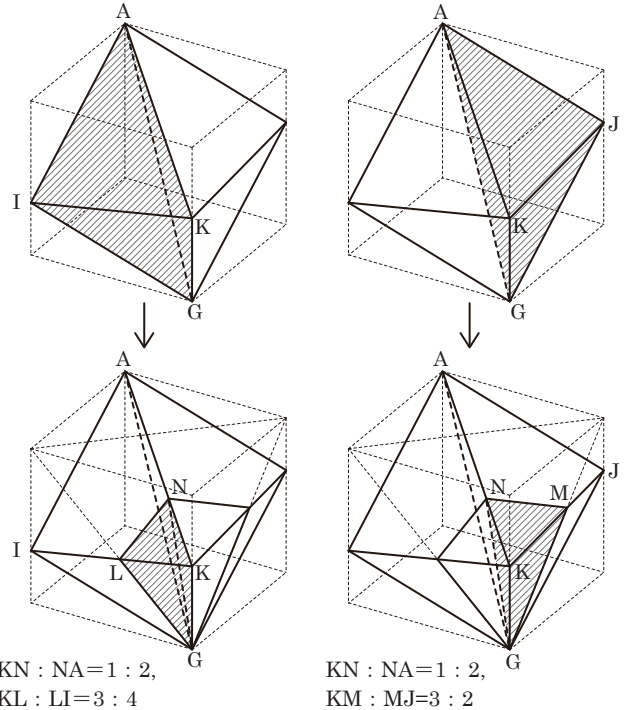
11

右の図は、1 辺の長さが 6 cm の立方体です。この立方体を 3 点 A, I, G を通る平面で切ったとき、この平面と辺 DH は点 J で交わります。四角すい K-AIGJ の体積は ① cm³ です。また、3 点 B, D, G を通る平面で四角すい K-AIGJ を 2 つの立体に分けたとき、点 K を含む立体の体積は ② cm³ です。

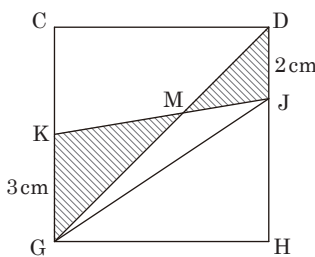


① 平面 AIGJ は平行四辺形なので、DJ=2 cm, JH=4 cm です。三角すい A-IGK は $3 \times 6 \times \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{1}{3} = 18 \text{ cm}^3$, 三角すい A-JGK も同じ体積なので、四角すい K-AIGJ は $18 \times 2 = 36 \text{ cm}^3$ になります。

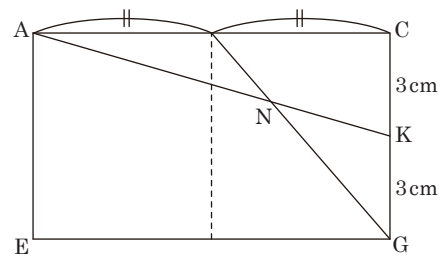
② 次に、この立体を面 BDG (正三角形の面) で切断します。四角すい K-NLGM の体積は、2 つの三角すいに分けて考えます。①より、三角すい K-AIG と K-AJG は 18 cm^3 なので、
 (三角すい K-NLG) = $18 \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{18}{7} \text{ cm}^3$,
 (三角すい K-NMG) = $18 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{18}{5} \text{ cm}^3$.
 (各辺の比は下の図を参考)
 合わせると $\frac{18}{7} + \frac{18}{5} = \frac{216}{35} \text{ cm}^3$ になります。



KL : LI = 3 : 4



KM : MJ = 3 : 2



KN : NA = 1 : 2