1　A さんは IC カードを使ってバスに乗ります。IC カードとは，チャージ金額が記録されているカードで，乗車するごとに運賃と同じ額だけチャージ金額が減るものです。正規運賃は 210 円で，正規運賃で 4 回乗車するごとに次の 1 回は割引運賃で乗車できます。1 回目の割引運賃は 100 円，2 回目の割引運賃は 90 円，3 回目の割引運賃は 80 円，･･･ というように割引運賃は回を追うごとに 10 円ずつ額が減っていき，0 円になったらそれ以降は，4 回乗車するごとに次の 1 回は 0 円，すなわち無料で乗車できます。

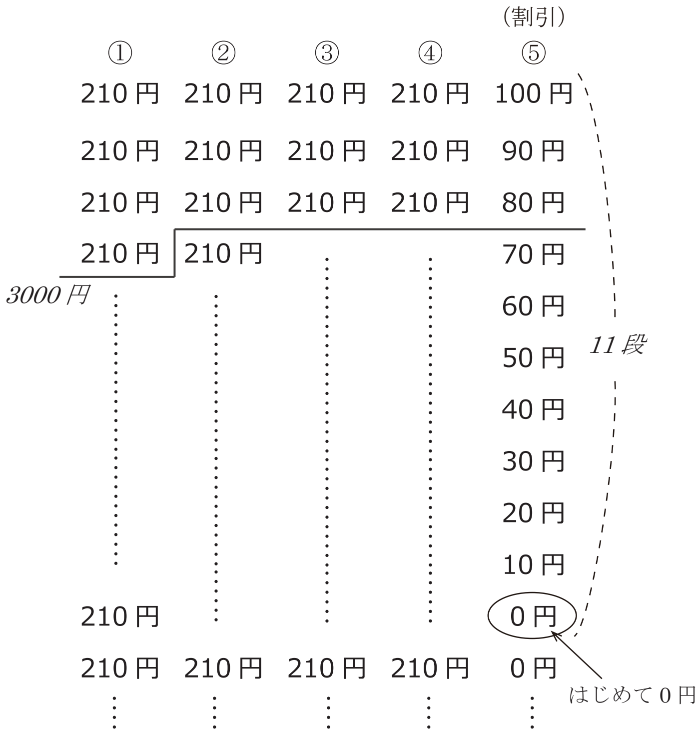
A さんがバスにはじめて乗車する前のチャージ金額は 3000 円で，チャージ金額が 210 円未満になったら次回乗車するまでに A さんが 5000 円チャージ (入金) することにします。

(1) A さんは 1 回もチャージすることなく，この IC カードで何回まで乗車できますか。

(2) はじめて 0 円で乗車できるまでに，A さんは何回チャージすることになりますか。

(3) この IC カードで 2012 回乗車するまでに，A さんは何回チャージすることになりますか。

支払う運賃の様子を，右のようにまとめることができます。



(1) 15 回乗車すると合計が 2790 円，16 回目に乗車で支払い合計がちょうど 3000 円 (残額が 0 円) になります。17 回目の乗車前にはじめてチャージすることになるので，3000 円のチャージで 16 回まで乗車できます。

(2) 55 回目の乗車での運賃がはじめて 0 円になり，この 55 回分の乗車金額の合計は

$$210\times(11\times4)+100+90+80+\cdots\cdots+10+0$$
$$=210\times44+550=9790 \text{ 円}$$

になります。合計が 3000 円以下はチャージなし，8000 円以下は 1 回チャージ，13000 円以下は 2 回チャージ，… なので，このときは 2 回チャージすることになります。

(3) 2012÷5＝402 あまり 2 なので，正規運賃で 2012－402＝1610 回乗車したことがわかります。金額の合計は 210×1610＋550＝338650 円で，「338650 円＝3000 円＋5000 円 ×67＋650 円」なので，A さんは 67＋1＝68 回チャージすることになります。

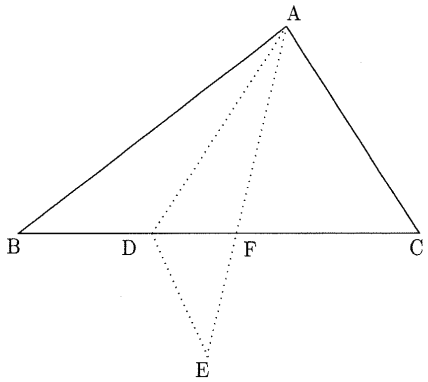
2 AB ＝ 6cm，BC ＝ 7cm の三角形 ABC の辺 BC 上に点 D をとり，三角形 ABD を 2 点 A と D を通る直線で折り返すと，点 B は右図のような点 E に重なります。AE と BC の交わる点を F とすると，CF ＝ 3cm になり，三角形 ABC の面積が三角形 DEF の面積の 7 倍になります。

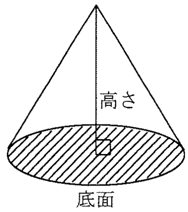
(1) AF，BD の長さをそれぞれ求めなさい。

(2) 三角形 ACD を 2 点 A と D を通る直線を軸（じく）として回転してできる立体の体積は，三角形 ABD を 2 点 A と D を通る直線を軸として回転してできる立体の体積の何倍ですか。ただし，右下の図のような立体を「円すい」といい，その体積は，

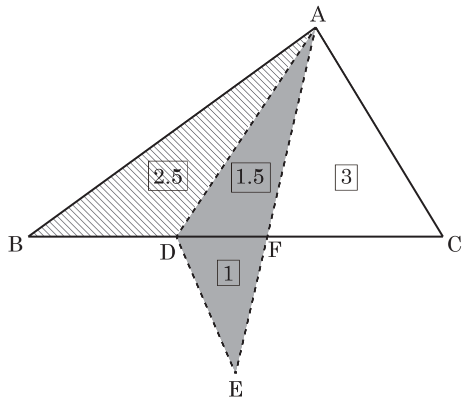
（底面の円の面積）×（高さ）÷3

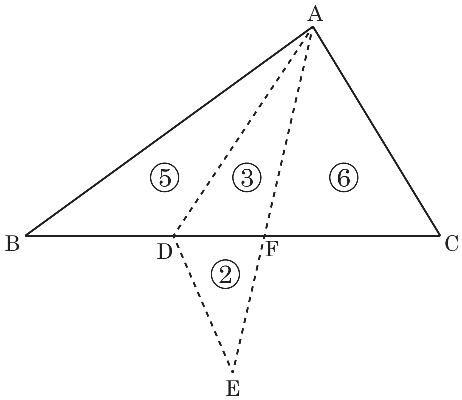
で求めることができます。



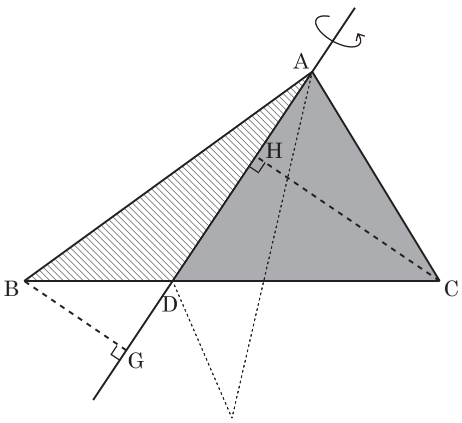


(1) CF＝3 cm，BF＝7－3＝4 cm，また，AE＝6 cm です。BF : FC＝4 : 3 なので，三角形 ABF と三角形 AFC の面積比が $\boxed{4}$: $\boxed{3}$ になり，三角形 ABD と三角形 AED は面積が等しくなるので，三角形 ABD は ($\boxed{4}$＋$\boxed{1}$) ÷2＝$\boxed{2.5}$ だとわかります。三角形 ADF は $\boxed{4}$－$\boxed{2.5}$＝$\boxed{1.5}$ です。





比をすべて整数にすると左の図のようになります。求める長さは，AE＝6 cm，AF : FE＝3 : 2 なので，AF＝6×$\frac{3}{5}$＝3.6 cm，また，BF＝4 cm，BD : DF＝5 : 3 なので，BD＝4×$\frac{5}{8}$＝2.5 cm です。



(2) 三角形 ABD と三角形 ACD の面積比が 5 : 9 なので，BG : CH＝5 : 9（左図）になります。

三角形 ABD の回転体の体積は

$$\mathrm{BG}\times\mathrm{BG}\times3.14\times\mathrm{AD}\times\frac{1}{3}$$

三角形 ACD の回転体の体積は

$$\mathrm{CH}\times\mathrm{CH}\times3.14\times\mathrm{AD}\times\frac{1}{3}$$

このような計算式で求めることができます。

体積比は (5×5) : (9×9) ＝25 : 81 なので，答えは $\frac{81}{25}=3\frac{6}{25}$ 倍になります。

3 ツル，カメ，トンボの数をかぞえました。かりにツルの数をカメの数とし，カメの数をトンボの数とし，トンボの数をツルの数とすると，足の本数の合計は 200 本になります。一方，実際の足の本数の合計もやはり 200 本になります。実際のツルの数として考えられるものをすべて答えなさい。ただし，ツル，カメ，トンボの数はすべて 1 以上とします。なお，ツル，カメ，トンボの足の本数はそれぞれ 2 本，4 本，6 本です。

実際のツル，カメ，トンボの数を，右の記号に置きかえて考えていきます。

ツル	○ 羽
カメ	△ 匹
トンボ	□ 匹

足の数の合計について，

（実際）2×○＋4×△＋6×□＝200 本　… **ウ**

（まちがえ）2×△＋4×□＋6×○＝200 本

と，関係を表す 2 つの式ができます。2 で割って記号の順番を整理すると，

1×○＋2×△＋3×□＝100 … **ア**

3×○＋1×△＋2×□＝100 … **イ**

になります。

アと**イ**の左側の差に注目すると，2×○＝△＋□ の関係がわかり，これを**ウ**の式に差し替えてまとめると，5×△＋7×□＝200 になります。このような式を不定方程式と呼び，あとは整数△，□の組み合わせを探すだけです。（7×□の部分は 5 の倍数になるので，□が 5 の倍数であることに目星をつけておきましょう。）

5×△＋7×□＝200

−7		＋5
33	5	
26	10	
19	15	
12	20	
5	25	

組み合わせを 1 つ見つけると，他の組み合わせがイモヅルで発見できます。

2×○＝△＋□なので，○は（33＋5）÷2＝19，（26＋10）÷2＝18，… のように求めることができます。

まとめると次のようになり，考えられる実際のツルの数は 15，16，17，18，19（羽）です。

ツル ○	カメ △	トンボ □
19	33	5
18	26	10
17	19	15
16	12	20
15	5	25

ただし，問題文の読み方次第では次のような式にもなり，答え（考えられるツルの数）も変わります。

（実際）2×○＋4×△＋6×□＝200 本

（まちがえ）4×○＋6×△＋2×□＝200 本

これを同じ手順で解いていくと，考えられるツルの数は 5，12，19，26，33 のように，別の答えになります。

ツル ○	カメ △	トンボ □
33	5	19
26	10	18
19	15	17
12	20	16
5	25	15

4 2 以上 150 以下の整数 n に対して，$< n >$ は n の約数の中で 2 番目に大きい整数を表すことにします。たとえば， 6 の約数は 1, 2, 3, 6 なので $< 6 > = 3$ であり，7 の約数は 1, 7 なので $< 7 > = 1$ です。

(1) 2 以上 150 以下のすべての偶数 n に対する $< n >$ の和, すなわち， $< 2 > + < 4 > + < 6 > + \cdots + < 150 >$ を求めなさい。

(2) 2 以上 150 以下のすべての 3 の倍数 n に対する $< n >$ の和, すなわち，$< 3 > + < 6 > + < 9 > + \cdots + < 150 >$ を求めなさい。

(3) $\dfrac{A}{5} = < A >$, $\dfrac{B}{7} = < B >$, $\dfrac{C}{11} = < C >$ となるような 2 以上 150 以下の整数 A, B, C はそれぞれ何個ありますか。

(4) 2 以上 150 以下のすべての整数 n に対する $< n >$ の和, すなわち，$< 2 > + < 3 > + < 4 > + \cdots + < 150 >$ を求めなさい。
なお，2 以上 150 以下の整数 n のうち，$< n > = 1$ であるものは 35 個です。

(1)
〈2〉＝1，〈4〉＝2，〈6〉＝3，〈8〉＝4，…… なので，
〈2〉＋〈4〉＋〈6〉＋ …… ＋〈148〉＋〈150〉
＝1＋2＋3＋ …… ＋74＋75＝（1＋75）×75÷2
＝2850 です。

(2)
3 ～ 150 の 50 個の 3 の倍数について，2 つのパターンに分けて，〈 〉の和を考えてみましょう。

（約数に 2 があらわれない 3 の倍数）
〈3〉＋〈9〉＋〈15〉＋〈21〉＋…… 〈147〉
＝1＋3＋5＋7＋ …… ＋49 ＝25×25＝625 …（※）

（約数に 2 があらわれる 3 の倍数）
〈6〉＋〈12〉＋〈18〉＋ …… ＋〈150〉
＝3＋6＋9＋ …… ＋75
＝3×（1＋2＋3＋ …… ＋25）＝3×325＝975
合計で 625＋975＝1600 になります。

(3)
A は，約数に 2，3 があらわれない 5 の倍数です。
A＝5×○とすると，○にあてはまる整数は
1，5，7，11，13，17，19，23，25，29
→ 10 個

B は，約数に 2，3，5 があらわれない 7 の倍数です。B＝7×△とすると，△にあてはまる整数は
1，7，11，13，17，19 → 6 個

C は，約数に 2，3，5，7 があらわれない 11 の倍数です。C＝11×□とすると，□は 1，11，13
→ 3 個

(4)
これまでの結果を上手く利用しましょう。

ア． 2 の倍数
〈2〉＋〈4〉＋〈6〉＋ …… ＋〈148〉＋〈150〉
→（1）より 2850

イ． 3 の倍数（**ア**を省いた）
〈3〉＋〈9〉＋…＋〈147〉 →（2）（※）より 625

ウ． 5 の倍数（**ア**，**イ**を省いた）
〈5〉＋〈25〉＋〈35〉＋ ……
＝1＋5＋7＋11＋13＋17＋19＋23＋25＋29
＝150

エ． 7 の倍数（**ア**，**イ**，**ウ**を省いた）
〈7〉＋〈49〉＋ …… ＝1＋7＋11＋13＋17＋19
＝68

オ． 11 の倍数（**ア**，**イ**，**ウ**，**エ**を省いた）
〈11〉＋〈121〉＋ …… ＝1＋11＋13＝25

カ． それ以外
〈13〉＝1，〈17〉＝1，〈19〉＝1，… などの素数
（13×13＞150 なので，1 個ずつしかない。）
問題文の条件を利用すると，
残りが 35－5＝30 個だとわかります。
→〈 〉の和は 1×30＝30 です。

よって，**ア**～**カ**の合計は
2850＋625＋150＋68＋25＋30＝3748 です。