1

1 から 2016 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 1 枚ずつあります。これら 2016 枚のカードが横一列に並んでおり，カードに書かれている数字は，左から順に 1，2，3，4，5，6，……，2015，2016 のように 1 ずつ大きくなっています。このカードの列に，次の操作を繰り返し行います。

操作：カードの列の一番左にあるカードを取り除く。その後，カードの列の一番左にあるカードを，カードの列の一番右に移す。

例えば，列に並んでいるカードに書かれている数字は，左から順に次のようになります。

1 回目の操作の後　3，4，5，6，……，2015，2016，2
2 回目の操作の後　5，6，……，2015，2016，2，4

(1) 1009 回目の操作で，□ という数字が書かれたカードを取り除きます。

(2) □ 回目の操作で，1000 という数字が書かれたカードを取り除きます。

(3) □ 回目の操作で，2016 という数字が書かれたカードを取り除きます。

(4) 2000 回目の操作が終わったとき，カードの列には 16 枚のカードが残ります。これら 16 枚のカードに書かれている数字は，いずれも ① で割ると ② 余ります。ただし，空欄 ② に入る数は 0 ではありません。

(5) 2015 回目の操作でカードを取り除くと，□ という数字が書かれたカードだけが残ります。

1 周目　1, 3, 5, 7, 9, ……………, 2015（1008 個）（取る）2 の倍数＋1　（残る）2 の倍数
2 周目　2, 6, 10, ………, 2014（504 個）（取る）4 の倍数＋2　（残る）4 の倍数
3 周目　4, 12, ……, 2012（252 個）（取る）8 の倍数＋4　（残る）8 の倍数
4 周目　8, 24, …, 2008（126 個）（取る）16 の倍数＋8　（残る）16 の倍数
5 周目　16, 48, …, 2000（64 個）（取る）32 の倍数＋16　（残る）32 の倍数
6 周目　32, 96, …, 2016（32 個）（取る）64 の倍数＋32　（残る）64 の倍数
7 周目　128, 256, …, 1920（15 個）（取る）128 の倍数　（残る）128 の倍数＋64
⋮　　⋮

(1) 1 周目で 1008 枚の奇数を取り除き，1009 回目の操作で最小の偶数である 2 を取り除きます。

(2) 1000 は 8 の倍数ですが，16 の倍数でありません。4 周目に 8, 24, 40, … と取っていき，63 枚目が 1000 です。
→ 1008＋504＋252＋63＝1827 回目の操作

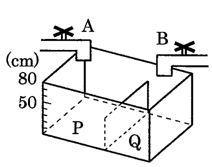
(3) $2016=2^5\times3^2\times7$ で，64 の倍数ではありません。6 周目の最後で 1008＋504＋252＋126＋64＋32＝1985 回目。

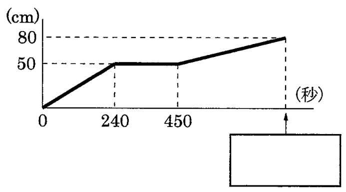
(4) 7 周目は 64 を飛ばして 128 の倍数を取りのぞき，128 で割ると 64 余る数が 2016－(1985＋15)＝16 枚残る。

(5)「継子立て」という有名な問題です。2^n(枚)のときに一番小さいカードから取り始めると，一番大きいカードが残ります。64, 192, 320, …, 1984 の 16 枚(2^4 枚)が残っており，64 から取り始めるので，1984 が最後に残ります。

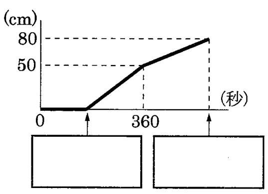
2

80 cm の深さまで水の入る直方体の水槽があり，右の図のように高さ 50 cm の仕切りで 2 つの部分 P，Q に区切られています。水槽の底面は水平であり，仕切りは水槽の底面に垂直です。また，2 つの蛇口 A，B があり，蛇口からはそれぞれ毎秒一定の量の水が注がれます。蛇口 A から入れた水は P の側に，蛇口 B から入れた水は Q の側に入ります。空の水槽に蛇口 A だけから水を入れたとき，水を入れ始めてからの P の側の水深の変化はグラフ 1 のようになります。また，空の水槽に蛇口 B だけから水を入れたとき，水を入れ始めてからの P の側の水深の変化はグラフ 2 のようになります。





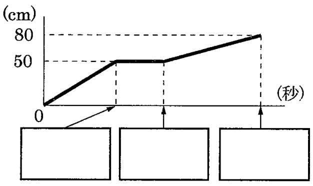
グラフ 1



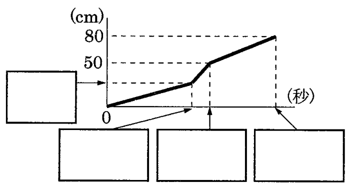
グラフ 2

(1) グラフ 1，2 の空欄に適切な数を書き入れなさい。単位は不要です。

(2) 空の水槽に蛇口 A，B から同時に水を入れ始めます。水を入れ始めてからの P の側の水深の変化を表しているものとして正しいものを，グラフ 3，グラフ 4 の 2 つから選び，選んだグラフの空欄に適切な数を書き入れなさい。単位は不要です。ただし，両方のグラフの空欄に数を書き入れた場合は不正解とします。



グラフ 3



グラフ 4

(1) グラフ 1　全体の $\frac{5}{8}$（深さ 50cm）までに 450 秒かかるので，満水には $450\times\frac{8}{5}$＝720 秒かかる。また，P，Q の底面積比が 240：(450－240)＝8：7 だとわかります。
グラフ 2　Q に 50 cm 入れるのに $360\times\frac{7}{15}$＝168 秒かかります。蛇口 A では満水に 720 秒かかるので，B では $720\times\frac{360}{450}$＝576 秒かかります。また，蛇口 A，B の 1 分あたりの水量は 576：720＝4：5(逆比)だとわかる。

(2) 満水を 4×720＝2880 とすると，蛇口 2 つを使うと 2880÷(4＋5)＝320 秒かかります。全体の $\frac{5}{8}$ まででは $320\times\frac{5}{8}$＝200 秒です。(1) より，先に Q が仕切りいっぱいまで入るので，答えはグラフ 4 が適切です。
このとき(168 秒後)，P には 4×168＝672 の水が入り，P の底面積を $2880\times\frac{8}{15}\div80$＝19.2 と表せるので，深さ 672÷19.2＝35 cm まで水が入っています。

3

1 辺の長さが 6 cm の正方形の板を 5 枚使って，図 1 のような立方体の形をした箱を作り，水平な床（ゆか）に置きます。上面 ABCD の部分には板はありません。

また，図 2 のようなガラス板があります。斜線（しゃせん）を引いた，1 辺の長さが 3 cm の正方形の 2 つの辺が箱の辺 AB，AD と重なるように，ガラス板を箱の上に置くと，図 3 のようになりました。

点 P は A の真上 3 cm のところ，点 Q は D の真上 6 cm のところにあり，2 点 P，Q を結ぶ直線上を電球が動きます。

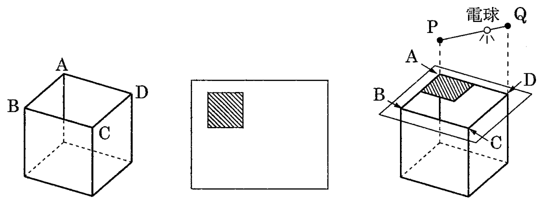
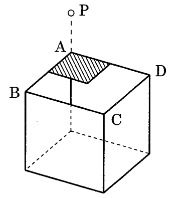


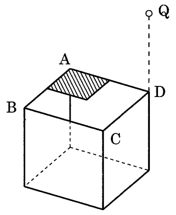
図1　図2　図3

板と，ガラス板の斜線部分は光を通さず，ガラス板の斜線部分以外の部分は光を通します。また，板とガラス板の厚さ，電球の大きさは考えません。

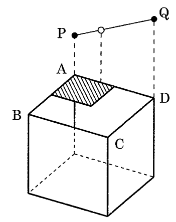
(1) 電球が点 P の位置にあるとき，箱の内部で，電球の光が通る部分の体積を求めなさい。



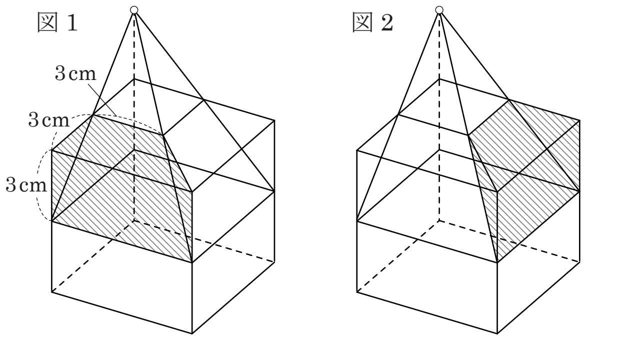
(2) 電球が点 Q の位置にあるとき，箱の内部で，電球の光が通る部分の体積を求めなさい。



(3) PQ を 3 等分する点のうち P に近い方の位置に電球があるとき，箱の内部で，電球の光が通る部分の体積を求めなさい。



(1)



光が通る部分は図 1，図 2 の斜線部分の合計です。ともに切断三角柱で，体積が $3\times3\times\frac{1}{2}\times\frac{3+6+6}{3}=22.5\text{ cm}^3$ なので，合計は $22.5\times2=$ 45 cm³ になります。

(2) 図 3 の色のついた部分には光が届きません。この体積が

$3\times6\times\frac{1}{2}\times\frac{3+3+6}{3}=36\text{ cm}^3$

なので，光が通る部分の体積は

$6\times6\times6-36=$ 180 cm³ です。

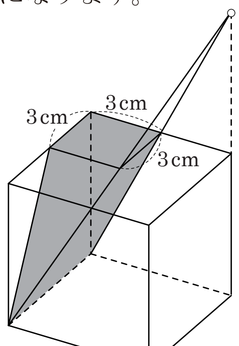


図 3

(3) 右図のように，電球は ABCD の面から高さ 4 cm の位置にあります。光の通る部分は，図 4，図 5 の斜線部分の合計です。

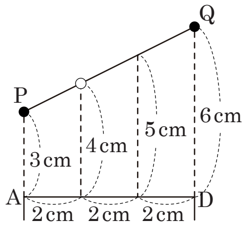


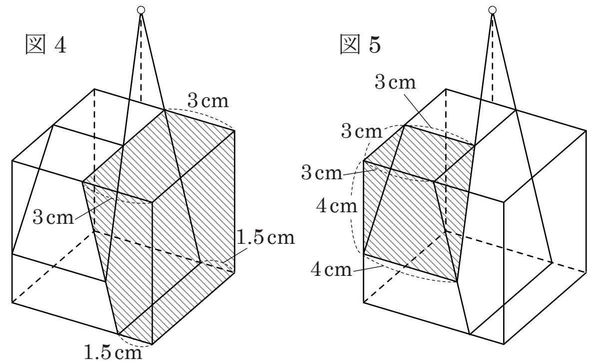
図 4 の立体　底面が台形の柱体

$(3+1.5)\times6\times\frac{1}{2}\times6=81\text{ cm}^3$

図 5 の立体　切断三角柱（高さが 3 cm，3 cm，4cm）

$3\times4\times\frac{1}{2}\times\frac{3+3+4}{3}=20\text{ cm}^3$

これらを合わせると $81+20=$ 101 cm³ です。



4

9桁の整数 123456789 を A とします。また，A の各桁の数から 2 個を選び，それらを入れ替えてできる 9 桁の整数を考えます。このような 9 桁の整数は全部で 36 個あり，これらを小さいものから順に①，②，…，㊱とします。例えば，①＝123456798，②＝123456879，③＝123456987，⑨＝123486759，㊱＝923456781 です。

以下では，①，②，…，㊱から A を引いて得られる 36 個の整数 ①$-A$，②$-A$，…，㊱$-A$ を考えます。例えば，

①$-A$＝123456798－123456789＝9，②$-A$＝90，㊱$-A$＝799999992

です。

(1) 36 個の整数 ①$-A$，②$-A$，…，㊱$-A$ のうち，1000 で割り切れるものは何個ありますか。

(2) 36 個の整数 ①$-A$，②$-A$，…，㊱$-A$ のうち，37 で割り切れるものは何個ありますか。

(3) これら 36 個の整数をすべてかけて得られる整数（①$-A$）×（②$-A$）×…×（㊱$-A$）は 3 で最大何回割り切れますか。例えば，810 は 3 で最大 4 回割り切れます。

(1) 入れ替えてできる 9 桁の数が□□□□□□789 のとき，A との差は下 3 桁が 000（1000 で割れる数）になります。A の上 6 桁 123456 の中から 2 個の数を入れ替えるので，選び方は $_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=$ 15 通り（個）あります。

(2)(3)

	〈A との差〉	〈選び方〉
隣り合う数を選ぶ→	9（＝9×1）	… 8 通り
1 桁飛ばし→	198（＝9×22）	… 7 通り
2 桁飛ばし→	2997（＝9×333）	… 6 通り
3 桁飛ばし→	39996（＝9×4444）	… 5 通り
4 桁飛ばし→	499995（＝9×55555）	… 4 通り
5 桁飛ばし→	5999994（＝9×666666）	… 3 通り
6 桁飛ばし→	69999993（＝9×7777777）	… 2 通り
7 桁飛ばし→	799999992（＝9×88888888）	… 1 通り
	〈A との差〉	〈選び方〉

例えば，2 桁飛ばしで 2 と 5 を入れ替えると 153426789 になり，A との差は 29970000 です。(2)(3) では 10 の倍数については考えないので，左の図のようにまとめることができます。

(2) 2 桁飛ばし，5 桁飛ばしのとき，A との差が 2997，5999994 で 37 の倍数です（37×3＝111 なので，111 の倍数を探すとよい）。選び方は 6＋3＝9 通り（個）あります。

(3) A との差は 8 パターンありますが，これらは少なくとも 9 の倍数（3 で 2 回割れる数）です。この時点で，3 で（8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1）×2＝72 回 割れます。また，2997，5999994 を 9 で割ると 333，666666 で，3 でさらに 2 回ずつ割れます。　→ 72＋（6＋3）×2＝90 回

5

1 辺の長さが 1 cm の立方体の形をしたブロックがいくつかあります。これらのブロックを，面と面がぴったり重なるようにはり合わせて立体を作ります。例えば，図 1 はブロックを 4 個はり合わせてできる立体の 1 つです。図 2 は，図 1 の立体をふくむへこみがない立体図形のうち，体積が最も小さい図形です。このように，いくつかのブロックをはり合わせた立体が与えられたとき，この立体をふくむへこみのない立体図形のうち，体積が最も小さいものを，「この立体を最小に包む図形」と呼ぶことにします。

なお，図 2 の立体は，五角形の面を 3 個，正方形の面を 3 個，長方形の面を 3 個，正三角形の面を 1 個，合計 10 個の面をもち，その体積は $5\frac{2}{3}$ cm³ です。

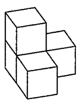


図1

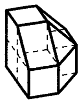


図2

(1) ブロックを 5 個はり合わせて，図 3 の立体を作ります。この立体を最小に包む図形を A とします。

(ア) A は □ 個の面をもちます。

(イ) A の体積を求めなさい。

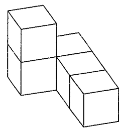


図3

(2) ブロックを 6 個はり合わせて，図 4 の立体を作ります。この立体を最小に包む図形を B とします。

(ア) B は □ 個の面をもちます。

(イ) B の体積を求めなさい。

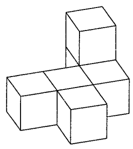
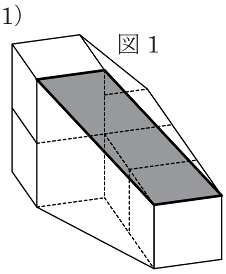
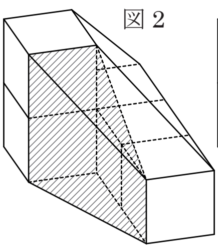
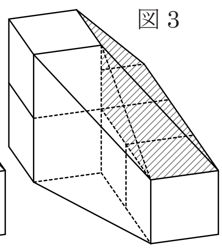


図4

(1)



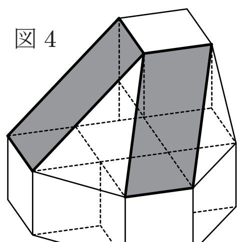


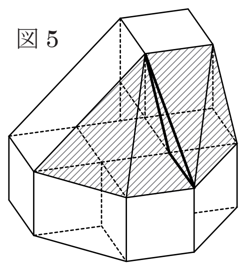


(ア) 太線部分が平行四辺形になることに特に注意しましょう（図 1）。上下左右前後の 6 方向と平行になる 6 面と，斜めの面が 3 個あるので，全部で面は 6＋3＝9 個です。

(イ) 図 2 の切断三角柱は $1\times2\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+2+2}{3}=\dfrac{5}{3}$ cm³，図 3 の切断三角柱は $1\times1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+3+3}{3}=\dfrac{7}{6}$ cm³ なので，合計で $5+\dfrac{5}{3}+\dfrac{7}{6}=7\dfrac{5}{6}$ cm³ です。

(2)





(ア) 太線の平行四辺形は 1 面として数えましょう（図 4）。上下左右前後 6 方向の面と，それ以外の 7 面を合わせると，B は面を 6＋7＝13 個もちます。

(イ) A と比べると，立方体 1 個（1 cm³），立方体の半分の三角柱が 2 個（1 cm³）と，図 5 の切断三角柱が増えます。これの体積が $1\times1\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1+1+3}{3}=\dfrac{5}{6}$ cm³ なので，B は $7\dfrac{5}{6}+1\times2+\dfrac{5}{6}=10\dfrac{2}{3}$ cm³ です。