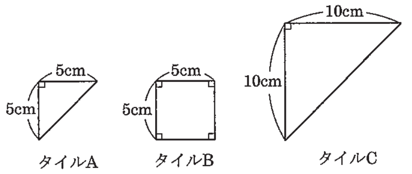
1

図のような形をしたタイルがそれぞれ何枚かあります。これらを裏返さずに，壁に固定された枠の中にすき間なくぴったりはりつけます。

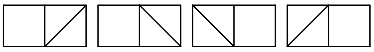


(1)　縦 5cm，横 10cm の長方形の枠の中に，4 枚のタイル A をはりつける方法は全部で［　　］通りあります。

(2)　1 辺の長さが 10cm の正方形の枠の中に，4 枚のタイル A と 2 枚のタイル B をはりつける方法は全部で［　　］通りあります。

(3)　縦 10cm，横 15cm の長方形の枠の中に，2 枚のタイル B と 2 枚のタイル C をはりつける方法は全部で［　　］通りあり，4 枚のタイル A と 2 枚のタイル C をはりつける方法は全部で［　　］通りあります。

(4)　縦 10cm，横 20cm の長方形の枠の中に，4 枚のタイル A と 2 枚のタイル B と 2 枚のタイル C をはりつけます。このとき，2 枚のタイル C の置き方は全部で何通りありますか。

(1)  の 4 通りあります。

(2) 図 1 のア－エの中から A をはる 2 マスのえらび方は $_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$ 通り，その 2 マスへの A の置き方は $2\times2=4$ 通りで，残りは B をはります。$6\times4=$24 通りです。

(3) **B 2 枚, C 2 枚**　図 2 の 4 通りあります。

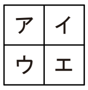


図 1

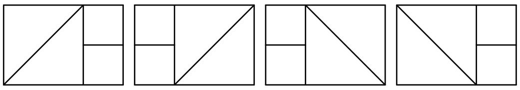


図 2

A 4 枚, C 2 枚　図 2 の B を A に変更する場合 $4\times2\times2=16$ 通り，図 3 も含めると $16+2=$18 通りです。

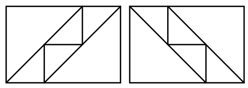
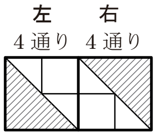


図 3

(4)



4×4＝16 通り

C 2 枚がつながるタイプ

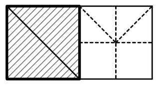
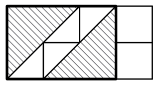

3×2＝6 通り

図 3 の形をふくむタイプ


2×2＝4 通り

C 2 枚の置き方は全部で $16+6+4=$26 通りあります。

2

図 1 は 1 辺の長さが 8cm の立方体です。

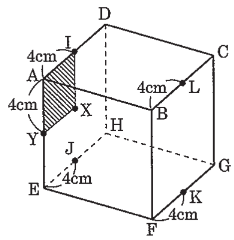


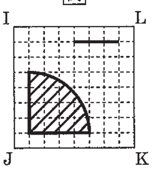
図 1

(1)　点 P が面 AEFB 上にあり，点 Q が面 DHGC 上にあるとき，P，Q を直線で結びその真ん中の点を M とすると，M は 4 点 I，J，K，L を通る平面上にあります。

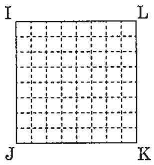
（ア）点 P が点 A の位置にあり，点 Q が辺 HG 上を動くとき，点 M が動くことのできる部分を，例にならって下の図にかき入れなさい。

（イ）点 P が辺 AE 上を動き，点 Q が辺 HG 上を動くとき，点 M が動くことのできる部分を，例にならって下の図にかき入れなさい。

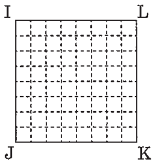
例



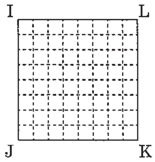
(1)（ア）の図



(1)（イ）の図



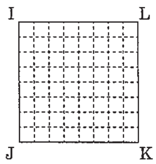
(2)　点 P は面 AEFB 上で点 E からちょうど 8cm 離れたところを動き，点 Q は面 DHGC 上で点 G からちょうど 8cm 離れたところを動きます。このとき，PQ の真ん中の点 M が動くことのできる部分を，(1)の例にならって右の図にかき入れなさい。そしてその面積を求めなさい。

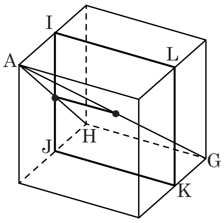


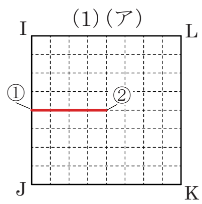
(3)　点 Q は面 DHGC 上で点 G からちょうど 8cm 離れたところを動きます。

（ア）点 P が図 1 の斜線部分の正方形 AYXI の辺 AY 上を動くとき，PQ の真ん中の点 M が動くことのできる部分を，(1)の例にならって右の図にかき入れなさい。

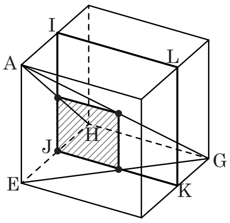
（イ）点 P が図 1 の斜線部分の正方形 AYXI 上を動くとき，PQ の真ん中の点 M が動くことのできる部分の体積を求めなさい。

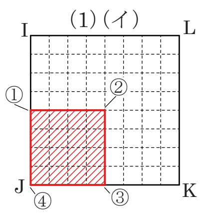




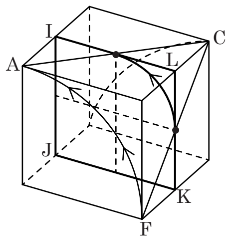


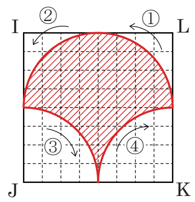
① P が A, Q が H のとき
② P が A, Q が G のとき





③ P が E, Q が G のとき
④ P が E, Q が H のとき



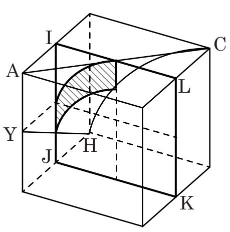


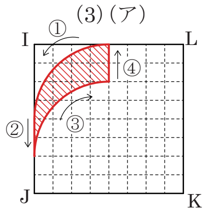
① Q を C に固定, P を F から A に
② P を A に固定, Q を C から H に
③ Q を H に固定, P を A から F に
④ P を F に固定, Q を H から C に

(1) ①－④のように，点 P, Q のいずれかの位置を抑えて作図していきましょう。（ア）は 2cm の直線,（イ）は正方形になります。

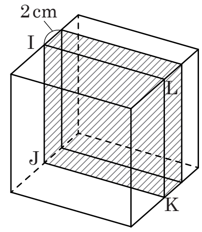
(2) 上の立体図の曲線は点 Q を C に固定し，点 P を F から A に動かしたときの点 M の動いた跡です。②③④の様子は図の通りです。囲む面積は正方形IJKL の面積の半分で $8\times8\div2=$32 cm² です。

（次のページに続く）





①ＰをＡに固定，ＱをＣからＨに
②ＱをＨに固定，ＰをＡからＹに
③ＰをＹに固定，ＱをＨからＣに
④ＱをＣに固定，ＰをＹからＡに



(3)(ア)(2)でできた曲線の１つが下にスライドしてできた図形だと捉えましょう。

(イ)点Ｐの移動範囲を正方形AYXIに広めると，点Ｍの移動範囲は（ア）の図形を底面とする柱体が，右上の立体図の斜線部分の範囲にできます。柱体の高さ（幅）は２cm なので，体積は $8\times2=$ 16 cm² です。

3

どの位の数も０でない整数すべてを

1, 2, 11, 3, 12, 21, 111, 4, 13, 22, 31, 112, ……

のように一列に並べます。この並びは次の㋐，㋑の規則によって作られます。

㋐　各位の数の和が小さい整数を先に並べます。ただし，１桁（けた）の整数はその数そのものを「各位の数の和」とします。

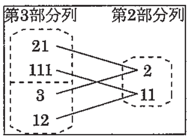
㋑　各位の数の和が同じものの中では，小さい整数から順に並べます。

また，この並びの中で，各位の数の和が 1, 2, 3, ……である整数が並んでいる部分を，それぞれ第１部分列，第２部分列，第３部分列，……ということにします。第１部分列は 1，第２部分列は 2, 11，第３部分列は 3, 12, 21, 111 です。

(1)　第１部分列には１桁の数が１個あり，第２部分列には１桁の数と２桁の数が１個ずつあります。このように，各部分列に並んでいる数を桁の数で分類し，それぞれ何個ずつあるかを調べると右の表のようになります。太線で囲まれた空欄（らん）にあてはまる数を書きこみなさい。

		桁の数					
		1	2	3	4	5	6
各位の数の和	1	1					
	2	1	1				
	3	1	2	1			
	4	1	3				
	5						
	6						

(2)　(1)の表を調べた翔太（しょうた）君は「第２部分列から第６部分列までは，各部分列に並んでいる数の個数は，その前の部分列に並んでいる数の個数の２倍になっています。第７部分列についてはどうなりますか？」と先生に質問しました。すると先生は「このメモを見て考えてごらん。」と言って翔太君に右のようなメモを渡（わた）しました。



翔太君は先生のメモをもとにして，第７部分列に並んでいる数の個数について次のように考えました。空欄「理由①」「理由②」に入る文を１行で書きなさい。ただし，数を列挙してはいけません。

第７部分列に並んでいる数を，一の位が１であるか２以上であるかで分けて考えます。

第７部分列に並んでいる数のうち，一の位が１である数は，［理由①］から，その個数は第６部分列に並んでいる数の個数と同じです。

第７部分列に並んでいる数のうち，一の位が２以上である数は，［理由②］から，その個数は第６部分列に並んでいる数の個数と同じです。

だから，第７部分列に並んでいる数の個数も，第６部分列に並んでいる数の個数の２倍になります。

(3)　翔太君は，メモの意味を理解できたことを先生に報告に行きました。そして「第８部分列，第９部分列，第10部分列に並んでいる数の個数も，同じように２倍，２倍をくり返して求められそうですね。」と翔太君が言ったところ，先生は次のように説明しました。空欄③にあてはまる数を答え，空欄「理由④」に入る文を１行で書きなさい。

「翔太君，確かに第８，第９部分列に並んでいる数の個数はそれで正しく求められます。しかし，第10部分列に並んでいる数の個数は，第９部分列に並んでいる数の個数の２倍より［③］個だけ少なくなります。その理由は，［理由④］からです。」

(4)　全体の数の並びの中で，111 は左から７番目にあります。10桁の数 1111111111 は左から何番目にありますか。

(5)　全体の数の並びの中で，左から 2018 番目にある数は何ですか。

(1)

第４部分列（和が４）　1桁 4 / 2桁 13　22　31 / 3桁 112　121　211 / 4桁 1111

第５部分列（和が５）　1桁 5 / 2桁 14　23　32　41 / 3桁 113　122　131　212　221　311 / 4桁 1112　1121　1211　2111 / 5桁 11111

表にまとめると次のようになります。表には**パスカルの三角形**の数が並び，各列の和が 1, 2, 4, 8, 16, … のように２倍になっていることが確認できます。

		桁の数						和
各位の数の和	1	1						→ 1
	2	1	1					→ 2
	3	1	2	1				→ 4
	4	1	3	3	1			→ 8
	5	1	4	6	4	1		→ 16
	6	1	5	10	10	5	1	→ 32

パスカルの三角形

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1

(2) 第７部分列のうち，一の位が１の数は 第６部分列の数の右はしに１をつけた数になる① ので 32 個あり，一の位が２以上の数は 第６部分列の数に１を足した数になる② ので 32 個あります。合計で $32\times2=64$ 個になります。

(3) 第７部分列は 64 個，第８部分列は $64\times2=128$ 個，第９部分列は $128\times2=256$ 個あります。第10部分列は １桁の数で和が 10 になる数がない④ ので，$256\times2=512$ 個よりも １個③ 少なくなります。

(4) 1111111111 は第10部分列で一番最後に並びます。
$1+2+4+8+16+32+64+128+256+(512-1)$
$=512\times2-1-1=$ 1022番目（全体での順番）です。

(5) 第11部分列では，１桁で和が 11 のものと，２桁で和が 11 のもの（1-10と10-1）の計３個が存在しない。第11部分列の一番最後は $1022+(512\times2-3)=2043$ 番目です。この問題では，第11部分列の中で大きい順で $2043-2018+1=$ **26番目**の数を考えるとよい。

（11桁）　（ここから 10桁）
11111111111 → 2111111111 → 1211111111 → … → 1111111112
10個

（ここから９桁）
→ 311111111 → 221111111 → 212111111 → … → 211111112
8個

→ 131111111 → 122111111 → 121211111
→ 121121111 → 121112111 → 121111211

4

1辺の長さが5cmの立方体のブロックが2種類あります。一方は光を通す透明なブロックで，もう一方は光を通さない黒いブロックです。また，図1は，光を通す6枚の正方形の板で囲まれた，1辺の長さが15cmの立方体の箱です。面ABCDの板だけふたになっています。

ふたを外して箱の中に2種類のブロックを合わせて27個入れるとき，それぞれのブロックが箱の中のどの位置にあるかを表す記号を次のように定めます。まず，1つの頂点がEにあるブロックの位置を1-1-1という記号で表します。次に，1-1-1を基準にして，EからFに向かう方向にx個目，EからHに向かう方向にy個目，EからAに向かう方向にz個目にあるブロックの位置をx-y-zという記号で表します。例えば，3-2-1の位置は図2の通りです。

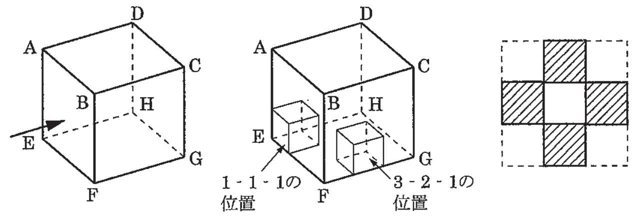


図1　図2　図3

(1) ふたを外して箱の中に2種類のブロックを合わせて27個入れたのち，ふたを閉じ，面EFGHが床に触れるように箱を水平な床の上に置くと，図1のADに平行な矢印の方向から見ても真上から見ても，図3のように見えました。黒く見える部分を斜線で表しています。

（ア）黒いブロックが必ず入っている位置を表す記号をすべて，解答欄に記入しなさい。ただし，1つの解答欄には1つの位置を表す記号を記入しなさい。また，解答欄をすべて使うとは限りません。

（イ）（ア）で答えた位置以外に，黒いブロックが入っている可能性がある位置を表す記号をすべて答えなさい。ただし，1つの解答欄には1つの位置を表す記号を記入しなさい。また，解答欄をすべて使うとは限りません。

（ウ）箱の中にある黒いブロックの個数は最大で□個，最小で□個です。

（エ）箱の中の黒いブロックの配置として可能なものは全部で□通りあります。

(2) 図4のように，箱の頂点Dにひもをつけてつるし，箱を床から離します。このとき，光を真上から当てたときに床にできる影を考えます。

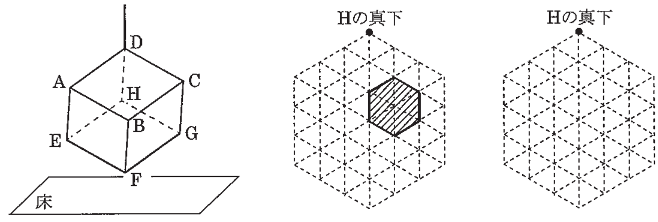
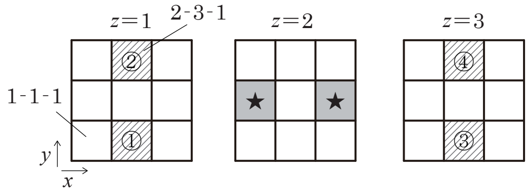


図4　図5　図6

（ア）図2の1-1-1，3-2-1の2つの位置に黒いブロックを入れ，その他の位置に透明なブロックを入れます。床にできる影のうち，3-2-1の位置にある黒いブロックの影は図5の斜線部分のような正六角形になります。1-1-1の位置にある黒いブロックの影を図5にかき入れなさい。ただし，影のふちを太くなぞり，内側を斜線で示しなさい。

（イ）箱を水平な床の上に置くと，ADに平行な矢印の方向から見ても真上から見ても，図3のように見えるようにブロックを箱に入れる場合を再び考えます。その中で箱の中にある黒いブロックの個数が最大の場合について，床にできる影を（ア）と同じように図6にかき入れなさい。

(1)



ある方向から見たとき，黒いブロックが1つでもあると黒く見えます，1列すべて透明なブロックのときは透明に見えます。ブロックの配置は上図のようになり，★の位置（1-2-2, 3-2-2）（ア）には必ず黒いブロックが入っており，①―④の位置（2-1-1, 2-3-1, 2-1-3, 2-3-3）（イ）には黒いブロックが入っている可能性があります。

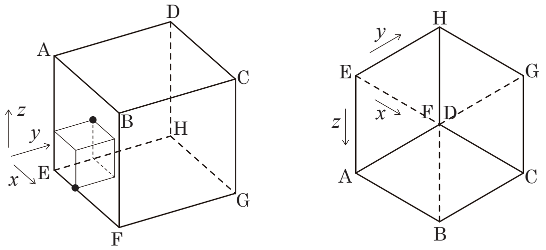
次のように，黒いブロックは最大で6個，最小で4個（ウ）

(6個のとき)★★①②③④

(5個のとき)★★①②③, ★★①②④, ★★①③④, ★★②③④

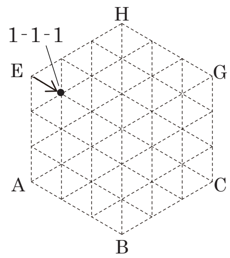
(4個のとき)★★①④, ★★②③　の7通り（エ）考えられます。

(2)



（ア）ある頂点の位置に関して，x方向（E→F），y方向（E→H），z方向（E→A）の3方向にそれぞれ動かすと，矢印の方向に点が移動すると考えましょう。

1-1-1の立方体では，●が正六角形の中心です。これはEからx方向に1動かしたものなので右図のようになり，この点を中心とする正六角形が作図の答えです。



（イ）(1)で求めた6個の立方体に関しては，1-1-1を基準にx, y, zの増加に注目して中心の位置を特定するとよいでしょう。③④は①②からzを2増やす方法で考えると作図がスムーズにできます。