

1

10 以上の整数に対して、各位の数をかけ合わせる操作 1 回を記号 $\rightarrow$ により表します。この操作を繰り返し、10 より小さくなると終了します。たとえば、 $2 \times 1 \times 0 = 0$ ですから、210 から始めると $210 \rightarrow 0$ となります。また、 $4 \times 8 = 32$ 、 $3 \times 2 = 6$ ですから、48 から始めると $48 \rightarrow 32 \rightarrow 6$ となります。

- (1) 2 桁の整数 A で $A \rightarrow 0$ となるものは全部で 個あり、3 桁の整数 B で $B \rightarrow 0$ となるものは全部で 個あります。

- (1) 2 桁の整数は $9 \times 10 = 90$ 個あり、格位の数に 0 がないものは $9 \times 9 = 81$ 個あります。A $\rightarrow 0$ になる 2 桁の整数 A は $90 - 81 = 9$ 個あります (10, 20, 30, ..., 90 の 9 個)。3 桁の整数は $9 \times 10 \times 10 = 900$ 個、格位の数に 0 がないものは $9 \times 9 \times 9 = 729$ 個あります。B $\rightarrow 0$ になる 3 桁の整数 B は $900 - 729 = 171$ 個あります。
- (2) D (2 桁 $\times$ 3 桁) は 12, 21, 112, 121, 211 の 5 通り考えられます。C の 3 桁の数字の組み合わせとして、例えば、(126) だと 126, 162, 216, 261, 612, 621 と並び

- (2) 3 桁の整数 C で $C \rightarrow D \rightarrow 2$ となるものを考えます。ただし D は整数です。

(ア) このような整数 C のうち、最も小さいものは で、最も大きいものは です。

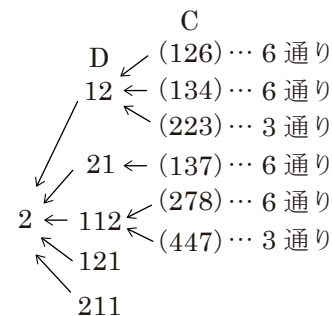
(イ) このような整数 C は全部で何個ありますか。

かえると 6 通りあります。
数の変化は右のように整理
できます。

(ア) C が最も小さいものは、
D = 12 のときで、C = 126
です。また、最も大きいも
のは、D = 112 のときで

(278) を並びかえて C = 872 になります。

(イ) C は全部で $6 \times 4 + 3 \times 2 = 30$ 個あります。



2

製品 P は、1 日につき、工場 A で 2000 個、工場 B で 3000 個生産されます。工場 A で生産された製品 P から 1000 個取り出して検査すると 7 個不良品が見つかります。また、工場 B で生産された製品 P から 1000 個取り出して検査すると 12 個不良品が見つかります。工場 A と工場 B で生産された製品 P はすべて検査場に入荷され、検査の前によく混ぜられます。

たとえば工場 A で生産された製品 P が 3000 個あったとき、その中の不良品の個数は $3000 \times \frac{7}{1000} = 21$ 個と推測されます。実際には 21 個より多いことも少ないこともあり得ますが、このように推測します。

この例にならって次の問いに答えなさい。

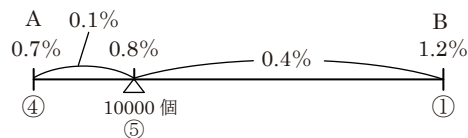
工場 A は 1000 個につき不良品が 7 個なので、不良品率は 0.7%、工場 B は 1000 個につき不良品が 12 個なので、不良品率は 1.2% とします。

- (1) 1 日につき、工場 A は 2000 個生産し $2000 \times 0.007 = 14$ 個の不良品、工場 B は 3000 個生産し $3000 \times 0.012 = 36$ 個の不良品があります。14 : 36 = 7 : 18 なので、不良品の合計 1000 個のうち $1000 \times \frac{7}{25} = 280$ 個が工場 A の不良品だと推測できます。

- (1) ある期間、工場 A、工場 B はどちらも休まず稼働しました。その期間に検査場に入荷された製品 P から不良品が 1000 個見つかったとき、その 1000 個の不良品のうち工場 A で生産された不良品の個数は 個と推測されます。

- (2) ある年の 4 月、工場 A は休まず稼働しましたが、工場 B は何日か休業となりました。その 1 ヶ月に検査場に入荷された製品 P から 10000 個取り出して検査したところ、不良品が 80 個見つかりました。その 80 個の不良品のうち工場 A で生産された不良品の個数は何個と推測されますか。

- (2) 次のように、食塩水のでんびん図のようなものを書いて考えます。



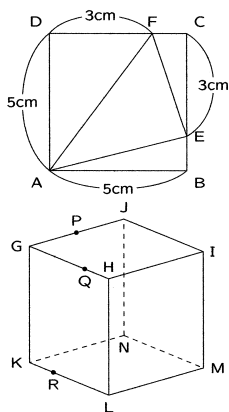
10000 個取り出して 80 個の不良品の場合、不良品率は 0.8% です。⑤ = 10000 個で、④ = $10000 \times \frac{4}{5} = 8000$ 個のうち $8000 \times 0.007 = 56$ 個が工場 A の不良品だと推測できます。

3

- (1) 右の図の正方形 ABCD において、三角形 AEF の面積は cm^2 です。

また、4 つの面がそれぞれ三角形 ABE, ECF, FDA, AEF と合同な三角すいの体積は cm^3 です。

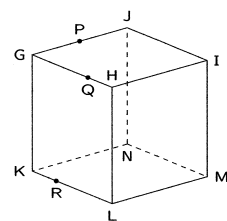
- (2) 右の図のような、1 辺の長さが 20cm の立方体 GHJL-KLMN があります。点 P は GP の長さが 10cm となる辺 GJ 上の点、点 Q は GQ の長さが 15cm となる辺 GH 上の点、点 R は KR の長さが 3cm となる辺 KL 上の点です。



- (ア) 3 点 P, Q, R を通る平面と辺 KN が交わる点を S とします。このとき、KS の長さは cm です。

また、3 点 P, Q, R を通る平面で立方体 GHJL-KLMN を 2 つの立体に切り分けたとき、G を含む方の立体の体積は cm^3 です。

- (イ) 4 点 G, P, Q, R を頂点とする三角すいの、三角形 PQR を底面とみたときの高さを求めなさい。



(ウ) 4 点 M, P, Q, R を頂点とする三角すいの、三角形 PQR を底面とみたときの高さを求めなさい。

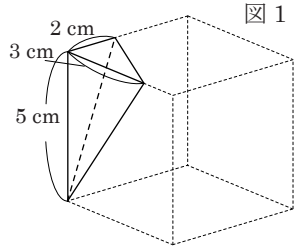
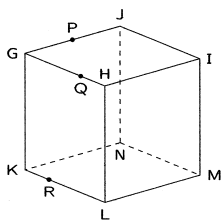


図 1

(1) 正方形 ABCD は $5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$ 、
三角形 AFD は $5 \times 3 \div 2 = 7.5 \text{ cm}^2$ 、
三角形 ABE は $5 \times 2 \div 2 = 5 \text{ cm}^2$ 、
三角形 FEC は $2 \times 3 \div 2 = 3 \text{ cm}^2$ 、
三角形 AEF は $25 - (7.5 + 5 + 3) =$
 9.5 cm^2 です。また 4 つの三角形

の面のできる三角すいは図 1 のようになります。体積は
 $2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{1}{3} = 5 \text{ cm}^3$ です。

(2) (ア) 3 点 P, Q, R を通る平面で切ったときの様子は図 2 のようになります。三角形 GQP と三角形 KRS は相似 (相似比は 5 : 1) なので $KS = 10 \times \frac{1}{5} = 2 \text{ cm}$ です。三角すい KRST と三角すい GQPT の相似比が 1 : 5 なので、体積比は $1^3 : 5^3 = 1 : 125$ です。三角すい KRST は (1) で求めた 5 cm^3 なので、G を含む三角すい台の体積は

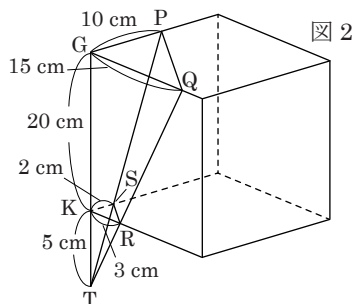


図 2

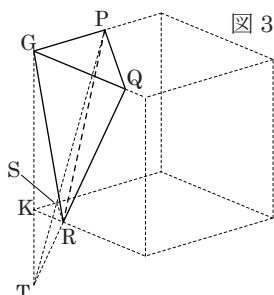


図 3

$5 \times (125 - 1) = 620 \text{ cm}^3$ になります。

(イ) 三角すい KRST は、面 STR を底面としたとき、(1) の答えより高さは $5 \times 3 \div 9.5 = \frac{30}{19} \text{ cm}$ です。問題でたずねられている高さは、三角すい GQPT を面 PTQ を底面としたときの高さと同じです (図 3)。三角すい KRST とは相似比が 1 : 5 なので、答えは $\frac{30}{19} \times 5 = \frac{150}{19} \text{ cm}$ です。

(ウ) 三角すい KRST と相似な三角すい VMWU に注目して考えます (図 4)。図 5 の三角形 KRS と三角形 MWV

は相似比が 3 : 47 なので、この 2 つの三角すいの相似比も 3 : 47 です。高さは $\frac{30}{19} \times \frac{47}{3} = \frac{470}{19} \text{ cm}$ になります。

図 4

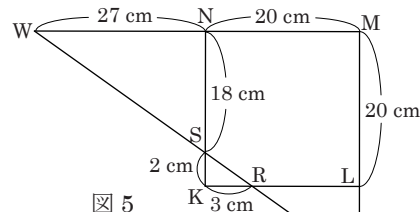
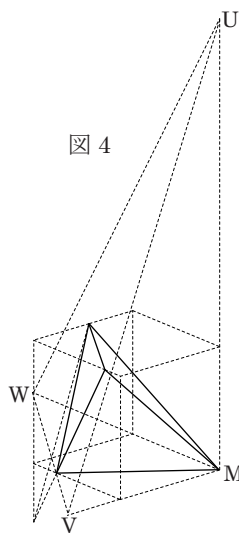
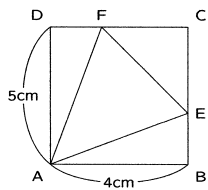


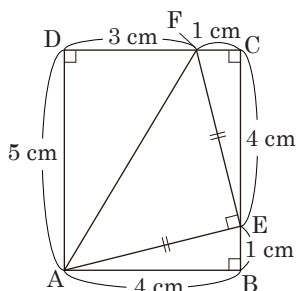
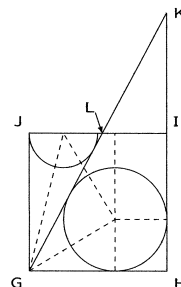
図 5

4

(1) 右の図のような長方形 ABCD があり、辺 BC 上に点 E、辺 CD 上に点 F があります。三角形 AEF が直角二等辺三角形であるとき、三角形 AEF の面積は cm^2 です。



(2) 1 辺の長さが 12 cm である正方形 GHIJ があります。右の図のように、辺 HI の延長上に点 K があり、GK と IJ が点 L で交わっています。また、半径が 3 cm である半円が三角形 GJL にぴったり収まっています。このとき、三角形 GHK にぴったり収まる円の半径は cm です。また、辺 HK の長さは cm です。

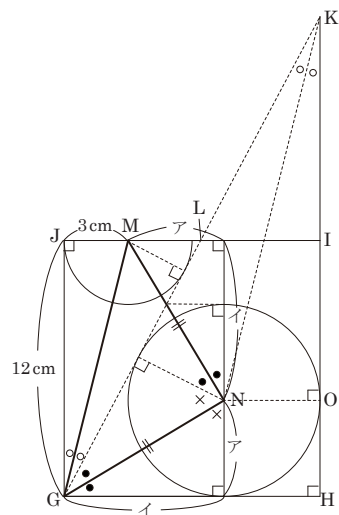


(1) 三角形 AEF は $AE = EF$ 、角 $AEF = 90$ 度の直角二等辺三角形です。

三角形 ABE と三角形 ECF は合同なので、 $AB = EC = 4 \text{ cm}$ 、 $BE = CF = 5 - 4 = 1 \text{ cm}$ だとわかります。三角形 AEF の面積は $5 \times 4 - (3 \times 5 \div 2 + 1 \times 4 \div 2 \times 2) = 20 - (7.5 + 4) = 8.5 \text{ cm}^2$ になります。

- (2) 図の同じ印のついた角は同じ大きさです。●●+○○=90度なので、●+○=45度になります。また、●●+××=180度なので、●+×=90度が分かります。三角形 GNM は直角三角形になり、(1)と同じように、合同な1組の直角三角形があらわれます。図のア+イ=12 cm、イ-ア=3 cm なので、和差算の計算で、イ=(12+3)÷2=7.5 cm、ア=(12-3)÷2=4.5 cm になり、点 N を中心とする円の半径は 4.5 cm だと分かります。

三角形 KGH に注目すると、角 GKH=○○で、角 GKN と角 NKH は○です。三角形 GMJ と三角形 KNO は相似な関係なので、3:12=1:4 より、KO=4.5×4=18 cm です。HK=4.5+18=22.5 cm になります。



5

図のような的があり、A から I の9つの場所に1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の9つの数が1つずつ書かれています。また、同じ数は2つ以上の場所に書かれることはありません。

A	B	C
D	E	F
G	H	I

- (1) 太郎さんがボールを3つ投げると、A, E, Iに当たり、当たった場所に書かれた数の和は10になりました。次郎さんもボールを3つ投げると、C, E, Gに当たり、当たった場所に書かれた数の和は10になりました。

(ア) Eに書かれた数が5であるとき、的に書かれた9つの数の並びは全部で 通りあります。

(イ) 的に書かれた9つの数の並びは、(ア)の場合を含めて全部で 通りあります。

- (2) 太郎さんがボールを3つ投げると、的にどの縦列にも1回ずつ、どの横列にも1回ずつ当たり、当たった場所に書かれた数の和は10になりました。次郎さんもボールを3つ投げると、的にどの縦列にも1回ずつ、どの横列にも1回ずつ当たり、当たった場所に書かれた数の和は10になりました。また、太郎さんが当てて次郎さんが当てなかった場所がありました。このとき、的に書かれた9つの数の並びは、(1)の場合を含めて全部で何通りありますか。

- (1) (ア) E=5のとき、A+I=C+G=5なので、和が5のは(1, 4)(2, 3)のいずれかです。A, I, C, Gの数の並びは図1の8通りで、残りの6, 7, 8, 9はB, D, F, Hに並ぶので、全部で $8 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 192$ 通りです。
- (イ) 図2のようにE=1, 2, 3, ...で場合分けして考えます。E=1のとき、A+I=C+G=9で、組み合わせは(2, 7)(3, 6)(4, 5)です。A, I, C, Gの数の並びは図1の8通りの3倍になります。E=2, 3は(ア)と同じになり、E=4やE=6以上のときは組み合わせが存在しません。全部で(ア)の $3+1 \times 3=6$ 倍の $192 \times 6 = 1152$ 通りあります。

図1

A	I	C	G
1	4	2	3
1	4	3	2
4	1	2	3
4	1	3	2
2	3	1	4
2	3	4	1
3	2	1	4
3	2	4	1

図2

E	和	A, I, C, G	
1	9	(2, 7)(3, 6)(4, 5)	24通り
2	8	(1, 7)(3, 5)	8通り
3	7	(1, 6)(2, 5)	8通り
4	6	(1, 5)	
5	5	(1, 4)(2, 3)	8通り
6	4	(1, 3)	

図3

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

- (2) まず太郎さんと次郎さんの当たった場所を考えます。的にどの縦列、横列にも1回ずつ当たるので、その3ヶ所は図3のaからfの6通りあり、もし太郎さんがaの場合、次郎さんはb, c, fの3通りのいずれかです。太郎さんが他のb, c, ...の場合も同様に3通りずつで、それぞれの当たった場所については $6 \times 3 \div 2 = 9$ 通りになります。また、この9通りの組み合わせに関して、2人ともが当たった場所は1ヶ所だけでこれは(1)のEにあたるもので、9つの数の並び方はどれも1152通りずつあります。答えは全部で $9 \times 1152 = 10368$ 通りになります。